

1

問題のページへ

AP : PE = s : 1 - s, CB : BG = t : 1 - t より,

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= s\vec{OE} + (1-s)\vec{OA} \\ &= s(3, 0, 4) + (1-s)(3, 0, 0) \\ &= (3, 0, 4s) \\ \vec{OQ} &= t\vec{OG} + (1-t)\vec{OC} \\ &= t(0, 2, 4) + (1-t)(0, 2, 0) \\ &= (0, 2, 4t) \end{aligned}$$

平面 OPQ の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とおくと,

$$\vec{n} \cdot \vec{OP} = 3a + 4sc = 0, \quad \vec{n} \cdot \vec{OQ} = 2b + 4tc = 0$$

これより, $a = -\frac{4}{3}sc, b = -2tc$ となり, $\vec{n} = (-\frac{4}{3}sc, -2tc, c) = -\frac{c}{3}(4s, 6t, -3)$

すると, 点 D を通り, \vec{n} を方向ベクトルにもつ直線は, k を実数として,

$$(x, y, z) = (0, 0, 4) + k(4s, 6t, -3) = (4sk, 6tk, 4 - 3k)$$

xy 平面との交点は, $z = 4 - 3k = 0$ から $k = \frac{4}{3}$ となり, $(x, y, z) = (\frac{16}{3}s, 8t, 0)$

さて, 線分 AC 上(両端を含む)の点は, l として,

$$(x, y, z) = l(3, 0, 0) + (1-l)(0, 2, 0) = (3l, 2-2l, 0)$$

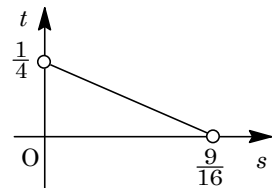
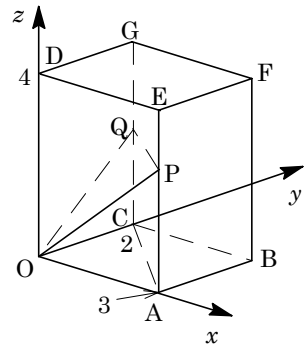
ここで, 条件より, $(\frac{16}{3}s, 8t, 0) = (3l, 2-2l, 0)$ となり,

$$\frac{16}{3}s = 3l \dots\dots\dots, \quad 8t = 2 - 2l \dots\dots\dots$$

より, $\frac{32}{5}s + 24t = 6$ となり, $16s + 36t = 9$

また, $0 \leq l \leq 1$ から $0 \leq 8t \leq 2$ となり, $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$

さらに, $0 < t < 1, 0 < s < 1$ と合わせると, $0 < t < \frac{1}{4}$ である。



[解 説]

空間ベクトルの頻出題で, 計算量も少なめです。

2

問題のページへ

点 A', B', C' が ABC の外接円上の点であるとき、条件より、点 A', B', C' は、それぞれ劣弧 BC, CA, AB の中点である。

まず、 $AB = A'C$ から、 $\angle A'AB = \angle A'AC$ ………

さて、点 A' を中心とし、 B, C を通る円と線分 AA' との交点を Q とすると、 $AB = A'Q$ より、

$$\angle A'QB = \angle A'BQ \dots\dots\dots$$

さらに、 $\angle A'AC = \angle A'BC$ から、 より、

$$\angle ABQ = \angle A'QB - \angle A'AB = \angle A'BQ - \angle A'AC = \angle A'BQ - \angle A'BC = \angle CBQ$$

これより、 BQ は $\angle ABC$ の二等分線となり、点 Q は ABC の内心に一致する。すなわち、点 A' を中心とし B, C を通る円は、 ABC の内心を通る。

同様にすると、点 B' を中心とし C, A を通る円、点 C' を中心とし A, B を通る円も、それぞれ ABC の内心を通る。

よって、 A', B', C' を中心とする 3 つの円が 1 点を共有するとき、その個数は高々 1 個であり、この点を P とすると、点 P は ABC の内心に一致する。

逆に、点 P が ABC の内心であるとき、点 A' を中心とし B, C を通る円において、

$$\angle BA'C = 360^\circ - 2\angle BPC \dots\dots\dots$$

点 P は、 ABC の内心であることより、

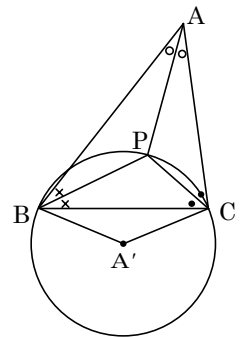
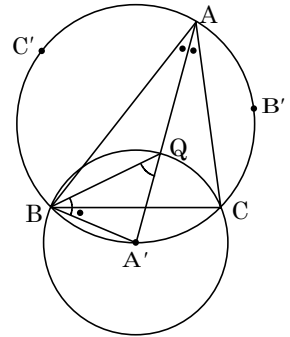
$$\begin{aligned} \angle BPC &= 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAC) \\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC \dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\text{より、} \angle BA'C = 360^\circ - 2\left(90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC\right) = 180^\circ - \angle BAC$$

よって、点 A' は ABC の外接円上の点である。

同様にすると、点 B', C' も ABC の外接円上の点となり、6 点 A, B, C, A', B', C' は同一円周上にある。

以上より、 A, B, C, A', B', C' が同一円周上にあるための必要十分条件は、 P が ABC の内心に一致することである。



[解 説]

前半の証明が難です。内心と外接円についての有名な問題を下敷きとしています。

3

問題のページへ

n 回の試行後、番号 n のカードが山の一番上にあるためには、 $n-1$ 回の試行後、番号 n のカードが一番上または上から二番目でなくてはいけい。

(i) $n-1$ 回の試行後、番号 n のカードが一番上にあるとき

$n-1$ 回目までの試行では、一番上のカードを番号 n のカードより下にもどし、 n 回目の試行では、番号 n のカードを山の一番上にもどすことより、その確率は、

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)!}{n^n}$$

(ii) $n-1$ 回の試行後、番号 n のカードが上から二番目にあるとき

1 k $n-1$ として、 k 回目の試行で、一番上のカードを番号 n のカードより上にもどし、それ以外の試行では、一番上のカードを番号 n のカードより下にもどす。このときの確率は、

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{k-1}{n} \cdot \frac{n-k}{n} \cdot \frac{k}{n} \cdots \frac{n-1}{n} = \frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}$$

(i)(ii)より、 n 回の試行後、番号 n のカードが山の一番上にある確率 P は、

$$\begin{aligned} P &= \frac{(n-1)!}{n^n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n-k)(n-1)!}{n^n} = \frac{(n-1)!}{n^n} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \right\} \\ &= \frac{(n-1)!}{n^n} \left\{ 1 + \sum_{l=1}^{n-1} l \right\} = \frac{(n-1)!}{n^n} \left\{ 1 + \frac{1}{2}(n-1)n \right\} = \frac{(n^2 - n + 2)(n-1)!}{2n^n} \end{aligned}$$

[解 説]

題意を把握するために、 $n=5$ の場合を具体的に考えました。その部分は、上の解からは省いていますが。

4

問題のページへ

条件より, $ad - bc = 1 \dots\dots$ であり,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc \\ ac + cd \end{pmatrix}$$

 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$ から,

$$a^2 + c^2 = 1 \dots\dots\dots, \quad (a^2 + bc)^2 + c^2(a+d)^2 = 1 \dots\dots\dots$$

を に代入して, $(a^2 + ad - 1)^2 + (1 - a^2)(a+d)^2 = 1$

$$a^2(a+d)^2 - 2a(a+d) + 1 + (1 - a^2)(a+d)^2 = 1, \quad (a+d)^2 - 2a(a+d) = 0$$

すると, $(a+d)(-a+d) = 0$ から, $a+d=0$ または $d=a$ (i) $a+d=0$ のときハミルトン・ケリーの定理より, $A^2 = -E$ (E は単位行列) となり,

$$\begin{pmatrix} x_{n+2} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

よって, $|\overrightarrow{OP_{n+2}}| = |\overrightarrow{OP_n}|$ から, n が偶数のとき $|\overrightarrow{OP_n}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$, n が奇数のとき $|\overrightarrow{OP_n}| = |\overrightarrow{OP_1}| = 1$ となる。(ii) $d=a$ のときより $a^2 - bc = 1$ となり, に代入すると $c(c+b) = 0$ から, $c=0$ または $b=-c$ (ii-i) $c=0$ のとき $a = \pm 1$ から, $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$ となる。以下, 複号同順で,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

これより, 帰納的に, $|\overrightarrow{OP_n}| = |\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$ (ii-i) $b=-c$ のとき $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ となり, $a^2 + c^2 = 1$ である。すると, $a = \cos \theta$, $c = \sin \theta$ となる θ が存在し,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

これより, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{pmatrix}$ となり, $|\overrightarrow{OP_n}| = 1$ (i)(ii)より, すべての n に対して $|\overrightarrow{OP_n}| = 1$ である。

[解 説]

~ の連立方程式を変形する際は, トレース $a+d$ の条件に注目をしています。

5

問題のページへ

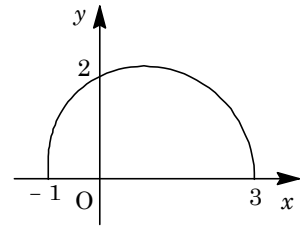
曲線 $C: r = 2 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) に対して,

$$x = (2 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = (2 + \cos \theta) \sin \theta$$

ここで, $\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \cos \theta - (2 + \cos \theta) \sin \theta$

$$= -2 \sin \theta - 2 \sin \theta \cos \theta$$

すると, C と x 軸とで囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1



回転して得られる立体の体積 V は,

$$V = \int_{-1}^3 \pi y^2 dx = \pi \int_{\pi}^0 (2 + \cos \theta)^2 \sin^2 \theta (-2 \sin \theta - 2 \cos \theta \sin \theta) d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (2 + \cos \theta)^2 (1 - \cos^2 \theta) (1 + \cos \theta) \sin \theta d\theta$$

ここで, $t = \cos \theta$ とおくと, $\frac{dt}{d\theta} = -\sin \theta$ から,

$$V = 2\pi \int_1^{-1} (2+t)^2 (1-t^2) (1+t) (-dt) = 2\pi \int_{-1}^1 (2+t)^2 (1-t^2) (1+t) dt$$

$$= 4\pi \int_0^1 (4+t^2-5t^4) dt = 4\pi \left(4 + \frac{1}{3} - 1\right) = \frac{40}{3} \pi$$

[解 説]

2 倍角や半角などの公式を用いて次数下げをした後, 積分を実行した方がよいかどうか, 迷うところです。ところが, 本問では, それが必要でした。

6

問題のページへ

(1) 条件より, $a_2 + b_2\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$ となり,

$$a_2 = a^2 + 2b^2 \dots\dots\dots, \quad b_2 = 2ab \dots\dots\dots$$

 a は奇数から a^2 も奇数となり, より a_2 は奇数である。ここで, a_2 と b_2 は互いに素でないと仮定すると, a_2 と b_2 はともに 3 以上の素因数 g をもつことになり, より, j, l を整数として,

$$a^2 + 2b^2 = gj \dots\dots\dots, \quad 2ab = gl \dots\dots\dots$$

より $2a^4 + 4a^2b^2 = 2a^2gj$, より $4a^2b^2 = g^2l^2$ となり,

$$2a^4 + g^2l^2 = 2a^2gj, \quad 2a^4 = g(2a^2j - gl^2)$$

 g は 3 以上の素数より, a^4 は g を約数にもち, すなわち a は g を約数にもつ。また, 同様にして, より $4a^2b^2 + 8b^4 = 4b^2gj$ となり,

$$g^2l^2 + 8b^4 = 4b^2gj, \quad 8b^4 = g(4b^2j - gl^2)$$

 g は 3 以上の素数より, b^4 は g を約数にもち, すなわち b は g を約数にもつ。これは, a と b が互いに素であるという条件に反する。したがって, a_2 と b_2 は互いに素である。(2) 条件より, $a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})^{n+1} = (a + b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2})$ なので,

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (aa_n + 2bb_n) + (ba_n + ab_n)\sqrt{2}$$

$$a_{n+1} = aa_n + 2bb_n \dots\dots\dots, \quad b_{n+1} = ba_n + ab_n \dots\dots\dots$$

以下, すべての n に対して, a_n は奇数であり, a_n と b_n は互いに素であることを, 数学的帰納法を用いて示す。(i) $n=1$ のとき $a_1 = a, b_1 = b$ から, 明らかに成立している。(ii) $n=k$ のとき a_k は奇数であり, a_k と b_k は互いに素であると仮定する。まず, より $a_{k+1} = aa_k + 2bb_k$ となり, a は奇数から a_{k+1} も奇数である。ここで, a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素でないとすると, a_{k+1} と b_{k+1} はともに 3 以上の素因数 g をもつことになり, より, j_k, l_k を整数として,

$$aa_k + 2bb_k = gj_k \dots\dots\dots, \quad ba_k + ab_k = gl_k \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } (a^2 - 2b^2)a_k = g(aj_k - 2bl_k), \quad (a^2 - 2b^2)b_k = g(al_k - bj_k)$$

 a_k と b_k は互いに素であることから, $a^2 - 2b^2$ は 3 以上の素因数 g をもつ。さて, より, $a_{k+1} - 2aa_k + (a^2 - 2b^2)a_{k-1} = 0$

$$2aa_k = a_{k+1} - (a^2 - 2b^2)a_{k-1} \dots\dots\dots$$

同様に, より, $b_{k+1} - 2ab_k + (a^2 - 2b^2)b_{k-1} = 0$

$$2ab_k = b_{k+1} - (a^2 - 2b^2)b_{k-1} \dots\dots\dots$$

すると、 a_{k+1} , b_{k+1} , $a^2 - 2b^2$ は 3 以上の素因数 g をもつので、 から、 $2aa_k$, $2ab_k$ は素因数 g をもつ。さらに、 a_k と b_k は互いに素なので、 a は素因数 g をもつ。

そこで、 $a^2 - 2b^2$ は 3 以上の素因数 g をもつことから、 b も素因数 g をもつことになり、 a と b が互いに素であるという条件に反する。

したがって、 a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より、すべての n に対して、 a_n は奇数であり、 a_n と b_n は互いに素である。

[解 説]

(2)は(1)と同じように進めていますが、後半が難です。連立漸化式と隣接 3 項間型の漸化式の関係については「ピンポイントレクチャー」で掠る程度に触れています。