

1

解答解説のページへ

xyz 空間で $O(0, 0, 0)$, $A(3, 0, 0)$, $B(3, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $D(0, 0, 4)$, $E(3, 0, 4)$, $F(3, 2, 4)$, $G(0, 2, 4)$ を頂点とする直方体 $OABC-DEFG$ を考える。辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P , 辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく。ただし, $0 < s < 1$, $0 < t < 1$ とする。 D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC (両端を含む) と交わるような s, t の満たす条件を求めよ。

2

解答解説のページへ

平面上の鋭角三角形 ABC の内部(辺や頂点は含まない)に点 P をとり、 A' を B, C, P を通る円の中心、 B' を C, A, P を通る円の中心、 C' を A, B, P を通る円の中心とする。このとき、 A, B, C, A', B', C' が同一円周上にあるための必要十分条件は P が ABC の内心に一致することであることを示せ。

3

解答解説のページへ

n 枚のカードを積んだ山があり、各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では、一番上のカードを取り、山の一番上にもどすか、あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。 n 回の試行を終えたとき、最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。

4

解答解説のページへ

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $ad - bc = 1$ を満たす行列とする (a, b, c, d は実数)。自然数 n に対して平面上の点 $P_n(x_n, y_n)$ を

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

により定める。 $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の長さが 1 のとき、すべての n に対して $\overrightarrow{OP_n}$ の長さが 1 であることを示せ。ここで O は原点である。

5

解答解説のページへ

xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分を出線とする極座標に関して, 極方程式

$$r = 2 + \cos \theta \quad (0 \leq \theta < \pi)$$

により表される曲線を C とする。 C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。

6

解答解説のページへ

a と b を互いに素, すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし, さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を

$$(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たすように定めるとき, 次の(1), (2)を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1) a_2 は奇数であり, a_2 と b_2 は互いに素である。
- (2) すべての n に対して, a_n は奇数であり, a_n と b_n は互いに素である。