$\boxed{1}$

問題のページへ

$y = px + q$ ……①と $y = \log x$ ……②を連立して,

$$\log x - px - q = 0 \quad (x > 0) \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②のグラフが共有点をもたない条件は, ③が実数解をもたないことである。

さて, $f(x) = \log x - px - q$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - p$$

(i)　$p \leqq 0$ のとき

$f'(x) > 0$ となり, $f(x)$ は $x > 0$ で単調に増加し,

$$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty, \ \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

よって, $f(x) = 0$ は実数解を 1 つもつので, 不適である。

(ii)　$p > 0$ のとき

$f'(x) = 0$ の解は $x = \frac{1}{p}$ となり, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

すると, $\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$ より, $f(x) = 0$ が実数解をもたない条件は,

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = -\log p - 1 - q < 0, \ \log p + q + 1 > 0$$

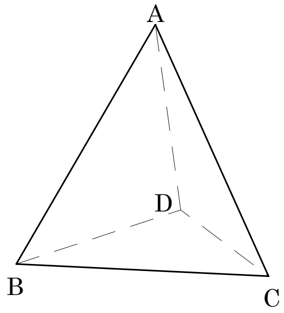
(i)(ii)より, 求める共有点をもたない条件は, $p > 0$ かつ $\log p + q + 1 > 0$ である。

[解　説]

微分法の方程式への応用についての基本問題です。

2

問題のページへ



時刻 0 から n までの間に，4 頂点のすべてに点 P が現れる確率を $P(n)$ とする。

まず，明らかに，$P(1)=P(2)=0$ である。

次に，$n\geqq 3$ のときを考える。

点 P が A と B，A と C，A と D の 2 頂点のみに現れる確率は，いずれも $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

また，点 P が A，B，C の 3 頂点のみに現れる確率は，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ であるが，そのすべてに現れるのは，A，B のみ，A，C のみに現れる場合を除いて，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ となる。

さらに，A, C, D の 3 頂点，A, D, B の 3 頂点の場合も同じ確率である。

これより，4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は，余事象を考えて，

$$P(n)=1-3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-3\left(\frac{1}{3}\right)^n=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

なお，この式は，$n=1$，2 のときも成立している。

[解 説]

確率の基本問題です。余事象を考えるところがポイントです。

3

問題のページへ

1点Oを通る3直線の方向ベクトルを$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$とすると，3直線が同一平面上にないことより，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$は1次独立である。

さらに，もう1本の直線の方向ベクトルを$\vec{d}$とすると，どの3直線も同一平面上にないことより，r, s, tを0以外の実数として，

$$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，ここで，次のように点A, B, C, Dを決める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -s\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d} \cdots\cdots\cdots ②$$

$r \neq 0$，$s \neq 0$，$t \neq 0$から, A, B, C, DはOと異なり，①②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d} - r\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} = t\vec{c} - (-s\vec{b}) = s\vec{b} + t\vec{c}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \neq \vec{0}$となり，四角形ABCDは平行四辺形である。

[解 説]

空間図形の問題ですが，誘導がないので，状況の設定から自分でしなくてはいけません。なお，②の関係式は，いきなり見つけたものではなく，予め方程式を立て計算した結果を書き直したものです。

4

問題のページへ

$y=|x^2-2|$……①と $y=|2x^2+ax-1|$……②を連立して,

$$|x^2-2|=|2x^2+ax-1|,\ \pm(x^2-2)=2x^2+ax-1$$

これより，$x^2+ax+1=0$……③　または　$3x^2+ax-3=0$……④

③より $ax=-x^2-1$，④より $ax=-3x^2+3$

すると，①と②のグラフの共有点の個数は，直線 $y=ax$……⑤と $y=-x^2-1$……⑥，$y=-3x^2+3$……⑦の 2 つのグラフの共有点の個数に一致する。

さて，⑥と⑦の交点は,

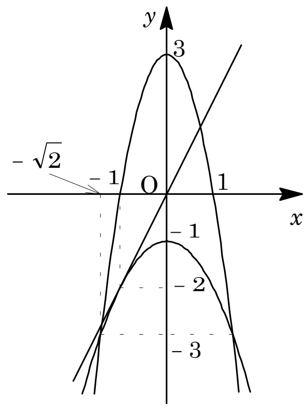
$$-x^2-1=-3x^2+3,\ x=\pm\sqrt{2}$$

よって，$(-\sqrt{2},\ -3)$，$(\sqrt{2},\ -3)$である。

また，⑤と⑥が接するのは，③が重解をもつときより,

$$D=a^2-4=0,\ a=\pm 2$$

このとき，重解は $x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$ であり，接点は $(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$となる。



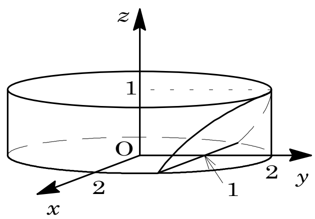
以上より，方程式①の異なる実数解の個数は，対称性に注意すると，右図より，$|a|<2$ のとき 2 個，$|a|=2$ または $|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 3 個，$2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 4 個である。

[解 説]

①と②のグラフの共有点の個数を，⑤と⑥および⑦のグラフの共有点の個数として翻訳し，視覚的にとらえています。文系に相同な問題があり，後半その解を流用しています。

5

問題のページへ



xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面 H の方程式は，

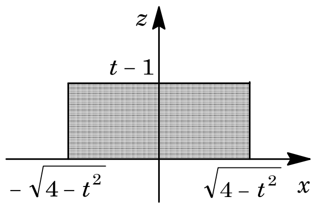
$$z=y-1$$

円柱 C を平面 H で分けた下方の部分を A としたとき，A を表す不等式は，

$$x^2+y^2\leqq 4,\quad 0\leqq z\leqq 1,\quad z\leqq y-1$$

ここで, A を $y=t$ $(1\leqq t\leqq 2)$ で切断したとき，その切り口は，$y=t$ 上で,

$$x^2\leqq 4-t^2,\quad 0\leqq z\leqq 1,\quad z\leqq t-1$$



$1\leqq t\leqq 2$ より，$4-t^2\geqq 0$，$0\leqq t-1\leqq 1$ から,

$$-\sqrt{4-t^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-t^2},\quad 0\leqq z\leqq t-1$$

この切り口の面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=2(t-1)\sqrt{4-t^2}$$

よって, A の体積を V とすると,

$$V=\int_1^2 S(t)\,dt=\int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\Big[-\frac{2}{3}(4-t^2)\sqrt{4-t^2}\,\Big]_1^2-2\Big(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\Big)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

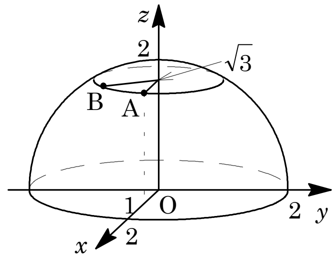
[解 説]

非回転体の体積を求める頻出問題です。京大では必須の平面の方程式を利用しています。なお，積分の第 2 項は，半径 2 の円を用いて，面積として計算しています。

6

問題のページへ

まず，地球の半径を 2，赤道面を xy 平面，北極を点 $(0,\ 0,\ 2)$ とし，東経135° を xz 平面上とする座標系を設定する。



すると，地点 A は北緯60°東経135° より，その座標は $\mathrm{A}(1,\ 0,\ \sqrt{3})$ となる。また，地点 B は北緯60°東経75° より，$\mathrm{B}(x,\ y,\ \sqrt{3})$ とおくと，

$$x = 2\cos 60^\circ \cos(-60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$y = 2\cos 60^\circ \sin(-60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，経路 R_1 は，平面 $z=\sqrt{3}$ 上での弧 AB より，その長さを l_1 とおくと，

$$l_1 = 2\pi\cdot 1\times\frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90}\pi$$

また，経路 R_2 は，半径 2 の大円上での弧 AB であり，$\angle\mathrm{AOB} = \theta^\circ$ とおくと，

$$l_2 = 2\pi\cdot 2\times\frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90}\theta$$

ここで，$\cos\theta^\circ = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{8} = 0.875$ から，三角関数表を用いると，

$$28^\circ < \theta^\circ < 29^\circ$$

よって，$\dfrac{28}{90}\pi < l_2 < \dfrac{29}{90}\pi$ となり，$\dfrac{l_2}{l_1} < \dfrac{29}{30} < 0.97$ である。

すなわち，R_1 に比べて R_2 は飛行距離が3％以上短くなる。

［解 説］

大圏航路を題材にした問題です。これは，メルカトル図法で書かれた世界地図で，最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお，与えられていた三角関数表は省略しました。