1

問題のページへ

[1]　$I=\int_0^2\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^2\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx+\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ とおく。

まず，$x^2+4=t$ とおくと，

$$\int_0^2\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_4^8\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\left[\sqrt{t}\right]_4^8=4\sqrt{2}-4$$

また，$x=2\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，さらに $\sin\theta=u$ とおくと，

$$\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2\sqrt{\tan^2\theta+1}}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{1-u^2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+u}{1-u}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\log(\sqrt{2}+1)$$

以上より，$I=4\sqrt{2}-4+\log(\sqrt{2}+1)$

[2]　1 段昇るのを x 回, 2 段昇るのを y 回とすると，条件より，$x+2y=15$

さらに, 2 段昇ることは連続しないので，$x+1\geqq y$ となり，

$(x,\ y)=(5,\ 5),\ (7,\ 4),\ (9,\ 3),\ (11,\ 2),\ (13,\ 1),\ (15,\ 0)$

$(x,\ y)=(5,\ 5)$ のとき，1 段を昇るのが 5 回，2 段を連続せずに昇るのが 5 回である。その場合の数を求めるために，右図のように 1 段を 5 個並べ，その間または前後の 6 か所ある∨のうちから 5 個を選び，そこで 2 段を昇ると考える。すると，この場合は ${}_6\mathrm{C}_5$ 通りであることがわかる。

∨ 1段 ∨ 1段 ∨ 1段 ∨ 1段 ∨ 1段 ∨

同様に考えると，$(x,\ y)=(7,\ 4)$ のとき ${}_8\mathrm{C}_4$ 通り，$(x,\ y)=(9,\ 3)$ のとき ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り，$(x,\ y)=(11,\ 2)$ のとき ${}_{12}\mathrm{C}_2$ 通り，$(x,\ y)=(13,\ 1)$ のとき ${}_{14}\mathrm{C}_1$ 通り，$(x,\ y)=(15,\ 0)$ のとき 1 通りである。

したがって，条件を満たす 15 段の階段を昇る昇り方の総数は，

$${}_6\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_4+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{12}\mathrm{C}_2+{}_{14}\mathrm{C}_1+1=277$$

[解　説]

[1]は積分計算，[2]は場合の数という小問 2 題で構成されています。[2]では漸化式の利用という有名な方法もあり，どちらを選択するかについて迷いましたが，15 段という小さめの値から判断し，直接的に数えました。

2

問題のページへ

k を 0 でない定数として，漸化式 $a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}$ ……①を満たす 1 つの数列を $a_n=ky^n$ とすると，

$$ky^{n+1}=kxy^n+y^{n+1}\cdots\cdots\cdots②$$

②より, $x>0$, $y>0$，$x\neq y$ なので，$ky=kx+y$，$k=\dfrac{y}{y-x}$

①−②より，$a_{n+1}-ky^{n+1}=x(a_n-ky^n)$

$a_1=0$ から，$a_n-ky^n=(a_1-ky^1)x^{n-1}=-kyx^{n-1}$

$$a_n=ky(y^{n-1}-x^{n-1})=\frac{y^2}{y-x}(y^{n-1}-x^{n-1})\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$y>x$ のとき

$0<\dfrac{x}{y}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n=0$ となり，③より，

$$a_n=\frac{y^2}{y-x}y^{n-1}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束する条件は, $0<y\leqq1$ である。

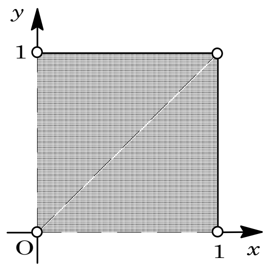
(ii)　$x>y$ のとき

$0<\dfrac{y}{x}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^n=0$ となり，③より，

$$a_n=\frac{y^2}{y-x}x^{n-1}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1}-1\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束する条件は，$0<x\leqq1$ である。

(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ が有限の値に収束するような点 $(x,\ y)$ を図示すると，右図の網点部のようになる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



[解 説]

漸化式の解法問題です。一般項が求まれば，収束する条件を丁寧に図示するだけです。なお，上記の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

3　問題のページへ

まず，$a+b+c+d=0$ ……①，$ad-bc+p=0$ ……②より，

$$a(-a-b-c)-bc+p=0,\ a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して，$(a+b)(a+c)=p$ ………③

ここで，$a \geqq b \geqq c \geqq d$ ……④より，$a+b \geqq a+c$

①④より，$0=a+b+c+d \leqq a+b+a+b=2(a+b)$ から，$a+b \geqq 0$

よって, p は素数なので，③から，

$$a+b=p \text{ ………⑤},\ a+c=1 \text{ ………⑥}$$

⑤より $b=p-a$ …… ⑤′，⑥より $c=1-a$ …… ⑥′

①から，$d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ………⑦

⑤′ ⑥′ ⑦を④に代入すると，$a \geqq p-a \geqq 1-a \geqq -p-1+a$ となり，

$$a \geqq p-a \text{ ………⑧},\ p-a \geqq 1-a \text{ ………⑨},\ 1-a \geqq -p-1+a \text{ ………⑩}$$

⑧より $a \geqq \dfrac{p}{2}$，⑩より $a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ となり，$\dfrac{p}{2} \leqq a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ ………⑪

また，⑨は $p \geqq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数，すなわち奇数であることを用いると，⑪から，

$$a=\frac{p+1}{2}$$

すると，⑤′ ⑥′ ⑦から，

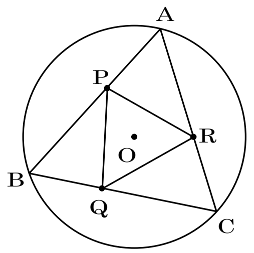
$$b=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2},\ c=1-\frac{p+1}{2}=\frac{-p+1}{2},\ d=-p-1+\frac{p+1}{2}=\frac{-p-1}{2}$$

[解 説]

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが，そのポイントは, 2 以外の素数は奇数という事実です。

4

問題のページへ



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，条件より，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{5}(3\vec{b}+2\vec{c}),\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{5}(3\vec{c}+2\vec{a})$$

さて，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ から，

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|=|3\vec{b}+2\vec{c}|=|3\vec{c}+2\vec{a}|$$

$$9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9|\vec{b}|^2+12\vec{b}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2=9|\vec{c}|^2+12\vec{c}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2$$

よって，(＊)から，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

すると，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$ から，

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2$$

以上より，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となるので，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

[解 説]

ベクトル利用という方針を立てた後は，その始点を決定するわけですが，これを点 O にすることには，ためらいはないでしょう。ここまで準備をすると，簡単な計算で結論が導けます。

5

問題のページへ

まず，$\overrightarrow{x_{n+1}}=A\overrightarrow{x_n}$ より，$\overrightarrow{x_n}=A^n\overrightarrow{x_0}$

ここで, m を 3 以上の自然数として，条件から $\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$ なので,

$$A^m\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$A^{m+1}\overrightarrow{x_0}=A\overrightarrow{x_0}$ から，$A^m\overrightarrow{x_1}=\overrightarrow{x_1}\ \cdots\cdots\cdots②$

ここで，列ベクトル $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_1}$ を横に並べてできる行列を $(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{x_1})$ と表すと，①②より，

$$A^m(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{x_1})=(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{x_1})\ \cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$\overrightarrow{x_1}\neq k\overrightarrow{x_0}$（$k$ は実数）のとき

逆行列 $(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{x_1})^{-1}$ が存在し，単位行列を E とすると，③から，

$$A^m=(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{x_1})(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{x_1})^{-1}=E$$

(ii)　$\overrightarrow{x_1}=k\overrightarrow{x_0}$（$k$ は実数）のとき

条件より，$\overrightarrow{x_1}=A\overrightarrow{x_0}$ なので，$A\overrightarrow{x_0}=k\overrightarrow{x_0}$ となり，

$$A^m\overrightarrow{x_0}=k^m\overrightarrow{x_0}\ \cdots\cdots\cdots④$$

①より，$\overrightarrow{x_0}=k^m\overrightarrow{x_0}$，$(k^m-1)\overrightarrow{x_0}=\vec{0}$

すると，$\overrightarrow{x_0}\neq\vec{0}$ から，$k^m=1$

(ii-i)　$k=1$ のとき

$A\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$ となるので，$m=1$ で $\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$ が成立し, $m\geqq 3$ に反する。

(ii-ii)　$k=-1$ のとき

$A\overrightarrow{x_0}=-\overrightarrow{x_0}$ となるので,

$$A^2\overrightarrow{x_0}=-A\overrightarrow{x_0}=\overrightarrow{x_0}$$

よって，$m=2$ で $\overrightarrow{x_m}=\overrightarrow{x_0}$ が成立し, $m\geqq 3$ に反する。

したがって $\overrightarrow{x_1}=k\overrightarrow{x_0}$ の場合は題意を満たさない。

(i)(ii)より，$A^m=E$ である。

[解 説]

2 つの列ベクトル $\overrightarrow{x_0}$, $\overrightarrow{x_1}$ が 1 次独立のとき，行列 $(\overrightarrow{x_0}\ \overrightarrow{x_1})$ は逆行列をもつということを，指針とした解です。1 次変換が復活したばかりなので難しく感じますが，数年たつと，標準的な問題になるでしょう。

6

問題のページへ

(1) $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ……①において，$b=-a$ とおくと，$f(0)=0$ から，

$$0=\frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)},\ f(-a)=-f(a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，①において，$b=a$ とおくと，$f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1+\{f(a)\}^2}$ となり，

$$f(a)+1=\frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}+1=\frac{\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)+1\right\}^2}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}\geqq 0$$

ここで，$f\left(\dfrac{a}{2}\right)=-1$ となる a の存在を仮定すると，②より，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-f\left(\frac{a}{2}\right)=1$$

すると，$1+f\left(\dfrac{a}{2}\right)f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=0$ となり，条件に反する。

よって，$f(a)+1>0$ から，$f(a)>-1$ となる。

さらに，②を用いると，$f(-a)=-f(a)<1$ となり, a が任意より $f(a)<1$

以上より，$-1<f(a)<1$ である。

(2) ①の両辺を b で微分すると，

$$f'(a+b)=\frac{f'(b)\{1+f(a)f(b)\}-\{f(a)+f(b)\}f(a)f'(b)}{\{1+f(a)f(b)\}^2}$$
$$=\frac{f'(b)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(b)\}^2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③に $b=0$ を代入すると，

$$f'(a)=\frac{f'(0)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(0)\}^2}=1-\{f(a)\}^2\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると, (1)から，$-1<f(x)<1$ なので，$f'(x)=1-\{f(x)\}^2>0$ となり, $x>0$ で

$$f(x)>f(0)=0$$

このとき，④より，$f''(x)=-2f(x)f'(x)<0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸である。

[解 説]

$f(0)=0$ が利用できるように，a と b に適当な関係を設定していくと，$f(x)$ が奇関数であることがわかります。この点を解の糸口としています。