1

問題のページへ

$Q(x)$ を複素数範囲で因数分解して,

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad(a\neq 0)$$

さて，$P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $A(x)$，余りを $px+q$ とおくと,

$$P(x)=Q(x)A(x)+(px+q)\quad(p^2+q^2\neq 0)$$

すると，$P(\alpha)=p\alpha+q$ ……①，$P(\beta)=p\beta+q$ ……②

次に，$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割った商を $B(x)$ とおくと,

$$\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$$

すると，$\{P(\alpha)\}^2=\{P(\beta)\}^2=0$ より，$P(\alpha)=P(\beta)=0$ ………③

①②③より，$p\alpha+q=0$，$p\beta+q=0$ となり,

$$p(\alpha-\beta)=0$$

ここで，$\alpha\neq\beta$ とすると $p=q=0$ となり，$p^2+q^2\neq 0$ に反する。

よって，$\alpha=\beta$ となるので, 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつ。

[解 説]

$Q(x)$ の因数分解を設定して，剰余の定理を用いる解法を採用しました。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

まず，線分 AB 上の点は, $0 \leqq s \leqq 1$ として,

$$(x,\ y,\ z) = s(0,\ 1,\ 2) + (1-s)(2,\ 3,\ 0) = (-2s+2,\ -2s+3,\ 2s)$$

また，線分 OP 上の点は, $0 \leqq u \leqq 1$ として,

$$(x,\ y,\ z) = u(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$$

線分 AB と線分 OP が交わるのは,

$$(-2s+2,\ -2s+3,\ 2s) = u(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$$

すなわち，$-2s+2 = u(5+t)$ ……①，$-2s+3 = u(9+2t)$ ……②

$2s = u(5+3t)$ ……③

①②より，$1 = u(4+t)$ ………④

②③より，$3 = u(14+5t)$ ………⑤

④⑤より，$14+5t-3(4+t) = 0$ となり，$t = -1$ である。

このとき，$u = \dfrac{1}{3}$，$s = \dfrac{1}{3}$ となり, $0 \leqq s \leqq 1$, $0 \leqq u \leqq 1$ を満たすので，$t = -1$ のとき，線分 OP と線分 AB は交点をもつ。

また，交点の座標は,

$$(x,\ y,\ z) = \frac{1}{3}(5-1,\ 9-2,\ 5-3) = \left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

[解 説]

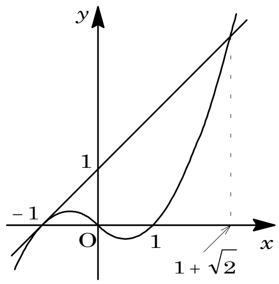
空間内の 2 直線が，交点をもつという特別な位置関係にあることを示す問題です。これは，連立方程式①②③が解をもつ条件として，言い換えることができます。

3

問題のページへ

関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\leqq 0$ の部分は，頂点が $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ の放物線より，a を 0 でない定数として，

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



原点を通るので，$0=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$，$a=-1$

よって，$y=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，$y=-x^2-x$ ………①

また，関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\geqq 0$ の部分は，$x\leqq 0$ の部分を原点対称したものなので，

$$-y=-(-x)^2-(-x),\ \ y=x^2-x\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，①より $y'=-2x-1$ なので，$x=-1$ のとき $y'=1$ となり，点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は，

$$y=x+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②と③の交点は，$x^2-x=x+1$，$x^2-2x-1=0$ より，$x=1+\sqrt{2}$

以上より，求める図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}(x+1+x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(x+1-x^2+x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(-x^2+2x+1)\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})\\&=2+\frac{4}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

[解　説]

微積分のセンターレベルの基本題です。なお，定積分の計算は，工夫なしで実行しています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(i)　$n=2$ のとき

　$n^2+2=6$ となり，n^2+2 は素数ではない。

(ii)　$n=3$ のとき

　$n^2+2=11$ となり, n と n^2+2 はともに素数である。

(iii)　$n \geqq 5$ のとき

　n は素数なので，2 の倍数でなく，しかも 3 の倍数でもないことより，k を自然数として，$n=6k\pm1$ と表すことができる。このとき,

$$n^2+2=(6k\pm1)^2+2=36k^2\pm12k+3=3(12k^2\pm4k+1)$$

　すると，$12k^2\pm4k+1$ は整数なので，n^2+2 は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)～(iii)より, n と n^2+2 がともに素数になるのは，$n=3$ の場合のみである。

[解 説]

　まず，$n=2$，3，5，7，11，13 として n^2+2 を計算したところ，n が 5 以上のとき，n^2+2 は 3 の倍数になると推測できました。これを，式を用いて確認した解です。

5

問題のページへ

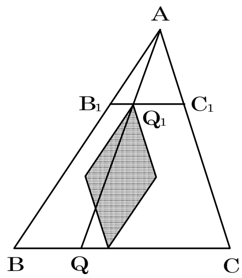
BC 上に点 Q を固定し, $0<p<1,\ 0<r<1$ として,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{AR}} = r\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

△PQR の重心を G とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} + p\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + r\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで, $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB_1}}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC_1}}$ とおき, 線分 $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{AC_1}$ を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を S_A とおく。

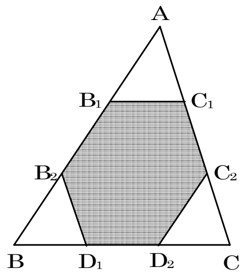


さて, p, r を $0<p<1$, $0<r<1$ を満たすように動かすと, 点 G は, S_A を $\overrightarrow{\mathrm{AQ_1}}$ だけ平行移動した平行四辺形 S_{Q_1} の内部を動く。

ここで, 点 Q を辺 BC 上で点 B から点 C まで動かすと, 点 $\mathrm{Q_1}$ は線分 $\mathrm{B_1C_1}$ 上を点 $\mathrm{B_1}$ から点 $\mathrm{C_1}$ まで動く。その結果, 平行四辺形 S_{Q_1} は平行移動し, その通過領域が点 G の動く範囲である。

以上より, 辺 AB の三等分点を $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, 辺 AC の三等分点を $\mathrm{C_1}$, $\mathrm{C_2}$, 辺 BC の三等分点を $\mathrm{D_1}$, $\mathrm{D_2}$ とおくと, 点 G は六角形 $\mathrm{B_1B_2D_1D_2C_2C_1}$ の内部を動く。

すなわち, 点 G の動く範囲は右図の網点部である。ただし, 境界線は含まない。



[解 説]

独立に動く点が 3 つあり, そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく, そのため演習するのに適した問題です。

6

問題のページへ

条件より，$F(\theta)=\int_0^{\theta}x\cos(x+\alpha)\,dx$ なので,

$$F'(\theta)=\theta\cos(\theta+\alpha)$$

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$，$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ なので，$0<\theta+\alpha<\pi$ となり，$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}\left(\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$のとき$F'(\theta)=0$となる。

すると，右の増減表より，$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ のとき$F(\theta)$は最大となる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$F'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$F(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$F(\theta)$の最大値は,

$$F\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}x\cos(x+\alpha)\,dx=\Big[x\sin(x+\alpha)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}-\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\sin(x+\alpha)\,dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\pi}{2}+\Big[\cos(x+\alpha)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\frac{\pi}{2}-\alpha-\cos\alpha$$

[解 説]

あまりにも簡単に結果がでてしまい，不気味な感じがします。