1　問題のページへ

原点と点$(1,\ 2)$を結ぶ線分Lは，$y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$………①

①と曲線$y=x^2+ax+b$……②の共有点は，

$$x^2+ax+b=2x,\ x^2+(a-2)x+b=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，①②が共有点をもつ条件は，③が$0\leqq x\leqq 1$に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり，さらに$f(x)=x^2+(a-2)x+b$……④とおくと，この条件は，放物線$y=f(x)$とx軸が$0\leqq x\leqq 1$に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より，$f(x)=\left(x+\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b$となり，放物線の軸の位置で場合分けをして，$(a,\ b)$の条件を求めると，

(i)　$-\dfrac{a-2}{2}<0\ (a>2)$のとき

$f(0)=b\leqq 0$かつ$f(1)=a+b-1\geqq 0$より，$-a+1\leqq b\leqq 0$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a-2}{2}\leqq 1\ (0\leqq a\leqq 2)$のとき

$-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b\leqq 0$　かつ（$f(0)=b\geqq 0$または$f(1)=a+b-1\geqq 0$）

よって，$b\leqq\dfrac{1}{4}(a-2)^2$かつ（$b\geqq 0$または$b\geqq -a+1$）

(iii)　$-\dfrac{a-2}{2}>1\ (a<0)$のとき

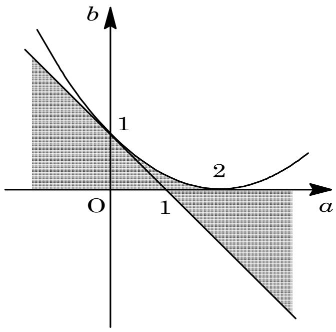
$f(0)=b\geqq 0$かつ$f(1)=a+b-1\leqq 0$より，

$$0\leqq b\leqq -a+1$$

さて，$b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2$と$b=-a+1$の共有点は，

$$\frac{1}{4}(a-2)^2=-a+1,\ a=0$$

以上より，$(a,\ b)$の存在領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



[解 説]

頻出問題なので，方針はすぐに決まります。ミスをしないように，ていねいに計算を進めていきます。

2

問題のページへ

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ より，$10\log_{10}2 < n(\log_{10}5 - \log_{10}4) < 20\log_{10}2$

$$10\log_{10}2 < n(1-3\log_{10}2) < 20\log_{10}2$$

$1-3\log_{10}2 > 0$ より，

$$\frac{10\log_{10}2}{1-3\log_{10}2} < n < \frac{20\log_{10}2}{1-3\log_{10}2} \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$f(x) = \dfrac{x}{1-3x}$，$a = \log_{10}2$ とおくと，①より，

$$10f(a) < n < 20f(a) \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$f(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3(1-3x)}$ と変形し，条件から $0.301 < a < 0.3011$ なので，

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.903)} < f(a) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.9033)}$$

これより，$3.103 < f(a) < 3.114$ となり，

$$31.03 < 10f(a) < 31.14,\quad 62.06 < 20f(a) < 62.28$$

②より, n は自然数なので, $32 \leqq n \leqq 62$ となり, n の個数は 31 である。

[解　説]

数値計算が面倒そうなので，後回しにしたくなる問題です。しかし，その予想は，はずれてしまいました。

3

問題のページへ

条件より，$\alpha+\beta+\gamma=0$ ………①，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ ………②

①より，$\gamma=-\alpha-\beta$ ……③となり，②に代入すると，

$$\alpha^2+\beta^2+(-\alpha-\beta)^2=0,\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

$\alpha=0$ とすると，④より $\beta=0$ となり，$\alpha\neq\beta$ に反する。

よって，$\alpha\neq 0$ から，④より，$1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=0$ となり，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm120^\circ)+i\sin(\pm120^\circ)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

③から，以下，複号同順で，

$$\frac{\gamma}{\alpha}=-1-\frac{\beta}{\alpha}=-1-\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}=\cos(\mp120^\circ)+i\sin(\mp120^\circ)$$

これより，点 β は点 α を原点まわりに $\pm120^\circ$，点 γ は点 α を原点まわりに $\mp120^\circ$ 回転した点である。

したがって，$\triangle\alpha\beta\gamma$ は重心が原点である正三角形である。

[解　説]

1　文字を消去して普通に解きました。なお，①式から $\triangle\alpha\beta\gamma$ の重心が原点であることがわかります。

4

問題のページへ

$a^3-b^3=217$ より，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=217$

ここで, a, b は整数なので，$a-b$，a^2+ab+b^2 はともに整数である。

さらに，$a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$ より，$a-b$，a^2+ab+b^2 はともに $217=7\times 31$ の正の約数となる。

(i)　$a-b=1$，$a^2+ab+b^2=217$ のとき

$a=b+1$ より，$(b+1)^2+(b+1)b+b^2=217$ から,

$$b^2+b-72=0$$

これより，$b=8,\ -9$ となり，$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9)$

(ii)　$a-b=7$，$a^2+ab+b^2=31$ のとき

$a=b+7$ より，$(b+7)^2+(b+7)b+b^2=31$ から,

$$b^2+7b+6=0$$

これより，$b=-1,\ -6$ となり，$(a,\ b)=(6,\ -1),\ (1,\ -6)$

(iii)　$a-b=31$，$a^2+ab+b^2=7$ のとき

$a=b+31$ より，$(b+31)^2+(b+31)b+b^2=7$ から,

$$b^2+31b+318=0$$

すると，$D=31^2-4\times 318=-311<0$ から, b は虚数となり不適。

(iv)　$a-b=217$，$a^2+ab+b^2=1$ のとき

$a=b+217$ より，$(b+217)^2+(b+217)b+b^2=1$ から,

$$b^2+217b+15696=0$$

すると，$D=217^2-4\times 15696=-15695<0$ から, b は虚数となり不適。

(i)～(iv)より，$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9),\ (6,\ -1),\ (1,\ -6)$

[解 説]

正確な計算だけで結論まで導けます。なお, 217 を 65 に変更すると文系の問題になりますが, 内容は全く同じです。

5

問題のページへ

(1)　$C_1 : y=\cos x$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ……②の共有点の条件は，$\cos x=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

ここで，$f(x)=\cos x-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ とおくと，

$$f(2k\pi)=1-\frac{1-4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}=\frac{8k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2}>0$$

$$f((2k+1)\pi)=-1-\frac{1-(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2}=\frac{-2}{1+(2k+1)^2\pi^2}<0$$

これより，$f(x)=0$ は $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。すなわち，C_1 と C_2 はこの区間に少なくとも 1 つの共有点をもつ。

この共有点を $(\alpha,\ \cos\alpha)$ とすると，①②より，$\cos\alpha=\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ ………③

さて，点 $(\alpha,\ \cos\alpha)$ における C_1 の接線は，①より $y'=-\sin x$ なので，

$$y-\cos\alpha=-\sin\alpha(x-\alpha)\ \cdots\cdots\cdots ④$$

$x=0$ のとき，$y=\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$ ………⑤

ここで，$2k\pi<\alpha<(2k+1)\pi$ において $\sin\alpha>0$ より，③から，

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}}=\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

⑤から，$y=\alpha\cdot\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}+\dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}=\dfrac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2}=1$ となり，接線④は点 $(0,\ 1)$ を通る。

(2)　点 $(0,\ 1)$ から C_1 に引いた接線は，接点を $(t,\ \cos t)$ とすると，

$$y-\cos t=-\sin t(x-t)\quad (2k\pi<t<(2k+1)\pi)$$

$(0,\ 1)$ を通ることより，$1-\cos t=t\sin t$，$t\sin t+\cos t-1=0$

ここで，$g(t)=t\sin t+\cos t-1$ とおくと，

$$g'(t)=\sin t+t\cos t-\sin t=t\cos t$$

右表より，$g(t)=0$ となる t は，$2k\pi<t<(2k+1)\pi$ にただ 1 つだけ存在し，言い換えると，点 $(0,\ 1)$ を通る接線の C_1 上の接点は，1 個だけしか存在しない。すなわち，C_1 と C_2 の共有点の個数は多くとも 1 つであり，(1)と合わせると，ただ 1 つとなる。

t	$2k\pi$	…	$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$	…	$(2k+1)\pi$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	-2

[解 説]

(2)は(1)の後半で示した C_1 と C_2 の共有点における C_1 の接線は，必ず点 $(0,\ 1)$ を通るということを用いています。ややくどく記述しましたが。

6

問題のページへ

隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となる条件を満たす塗り方のうち，n 番目が赤色である塗り方を a_n 通り，赤色以外である塗り方を b_n 通りとする。

$n=2$ のとき，条件を満たすのは, (赤，赤), (赤，青), (赤，黄), (青，赤), (黄，赤)より，$a_2=3$，$b_2=2$ である。

さて，$n+1$ 番目が赤のときは n 番目は任意の色であり，$n+1$ 番目が赤以外（青または黄）のときは n 番目は赤なので,

$$a_{n+1}=a_n+b_n \cdots\cdots\cdots ①,\quad b_{n+1}=2a_n \cdots\cdots\cdots ②$$

①－②×k より，$a_{n+1}-kb_{n+1}=(1-2k)a_n+b_n$

$$=(1-2k)\left(a_n-\frac{1}{2k-1}b_n\right)$$

$k=\dfrac{1}{2k-1}$ とすると，$2k^2-k-1=0$ より，$k=-\dfrac{1}{2}$，1

$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n\right)$

$$a_n+\frac{1}{2}b_n=\left(a_2+\frac{1}{2}b_2\right)2^{n-2}=(3+1)2^{n-2}=2^n \cdots\cdots\cdots ③$$

$k=1$ のとき，$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$

$$a_n-b_n=(a_2-b_2)(-1)^{n-2}=(3-2)(-1)^{n-2}=(-1)^n \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$\dfrac{3}{2}b_n=2^n-(-1)^n$，$b_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1}-\dfrac{2}{3}(-1)^n$

$$a_n=b_n+(-1)^n=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}-\frac{2}{3}(-1)^n+(-1)^n=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{1}{3}(-1)^n$$

よって，求める色の塗り方は,

$$a_n+b_n=\frac{2}{3}\cdot 2^{n+1}-\frac{1}{3}(-1)^n=\frac{1}{3}\left\{2^{n+2}-(-1)^n\right\}$$

[解 説]

ストレートには考えにくいので，漸化式を立てました。1 両目の車両の色で場合分けをして，隣接 3 項間型の漸化式を立てることもできますが，最初に考えた連立漸化式で記述しました。なお，漸化式の解法は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。