

1

問題のページへ

$$f(\theta) = \cos 4\theta - 4 \sin^2 \theta = \cos 4\theta - 4 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \cos 4\theta + 2 \cos 2\theta - 2 \text{ より,}$$

$$f'(\theta) = -4 \sin 4\theta - 4 \sin 2\theta = -4 \cdot 2 \sin \frac{6\theta}{2} \cos \frac{2\theta}{2} = -8 \sin 3\theta \cos \theta$$

$0 < \theta < \frac{3\pi}{4}$  において増減表をつくると、右表のようになる。

$\theta$	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{2\pi}{3}$	...	$\frac{3\pi}{4}$
$f'(\theta)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(\theta)$	1	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3

したがって、最大値は  $f(0) = 1$ 、最小値は  $f(\frac{\pi}{3}) = f(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{7}{2}$  である。

## [ 解 説 ]

微分法を用いて普通に解きました。角を  $2\theta$  に統一して平方完成を行っても OK です。穏やかな基本題です。

2

問題のページへ

$f(x) = \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right) \frac{\log x}{x}$  に対して、 $f(x) \geq 0$  とすると、

$$\frac{(e - x^\alpha) \log x}{x^{\alpha+1}} \geq 0, \quad (e - x^\alpha) \log x \geq 0$$

(i)  $e \geq x^\alpha$  かつ  $\log x \geq 0$  のとき

$$x \leq e^{\frac{1}{\alpha}} \text{ かつ } x \geq 1 \text{ となり, } e^{\frac{1}{\alpha}} > 1 \text{ から, } 1 \leq x \leq e^{\frac{1}{\alpha}}$$

(ii)  $e \geq x^\alpha$  かつ  $\log x \leq 0$  のとき

$$x \leq e^{\frac{1}{\alpha}} \text{ かつ } 0 < x < 1 \text{ となり, } e^{\frac{1}{\alpha}} > 1 \text{ から, 共通範囲は存在しない。}$$

これより、求める面積を  $S$  とすると、

$$S = \int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{e}{x^\alpha} - 1\right) \frac{\log x}{x} dx$$

ここで、 $\log x = t$  とおくと  $x = e^t$  で、 $x = 1 \rightarrow e^{\frac{1}{\alpha}}$  のとき  $t = 0 \rightarrow \frac{1}{\alpha}$  となり、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{e}{e^{\alpha t}} - 1\right) t dt = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} (e^{1-\alpha t} - 1) t dt = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} t e^{1-\alpha t} dt - \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^{\frac{1}{\alpha}} \\ &= \left[-\frac{1}{\alpha} t e^{1-\alpha t}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}} + \frac{1}{\alpha} \int_0^{\frac{1}{\alpha}} e^{1-\alpha t} dt - \frac{1}{2\alpha^2} = -\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} \left[e^{1-\alpha t}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}} - \frac{1}{2\alpha^2} \\ &= -\frac{3}{2\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} (1 - e) = \frac{1}{\alpha^2} \left(e - \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

### [ 解 説 ]

微分して増減表を作り、グラフの概形を書いて面積計算をするのが手順です。しかし、微分の計算が複雑になったため、この作業を止め、必要な情報だけ抽出して計算したのが上の解です。

3

問題のページへ

$$x^2 - x + \frac{n-1}{n^2} = \left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{n-1}{n}\right) \text{より,}$$

$$x^{2n} = P_n(x)\left(x - \frac{1}{n}\right)\left(x - \frac{n-1}{n}\right) + a_n x + b_n \dots\dots\dots$$

に  $x = \frac{1}{n}$  を代入すると,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2n} = \frac{1}{n} a_n + b_n, \quad \frac{1}{n} a_n + b_n = \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} \dots\dots\dots$$

に  $x = \frac{n-1}{n}$  を代入すると,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n} = \frac{n-1}{n} a_n + b_n, \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right) a_n + b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } \left(1 - \frac{2}{n}\right) a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{n}\right)^{2n}$$

$n \geq 3$  において,

$$a_n = \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n} - \left(\frac{1}{n}\right)^{2n} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{2}{n}} \left[ \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-2} - \frac{1}{n^{2n}} \right]$$

$n$  のとき,  $1 - \frac{2}{n} \rightarrow 1$ ,  $\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} \right\}^{-2} \rightarrow e^{-2}$ ,  $\frac{1}{n^{2n}} \rightarrow 0$  なので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\text{より, } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^{2n}} - \frac{1}{n} a_n \right) = 0$$

### [ 解 説 ]

剰余の定理と数列の極限を融合させた基本問題です。2 次式  $x^2 - x + \frac{n-1}{n^2}$  が因数分解できるので、難しくはありません。

4

問題のページへ

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおくと,  $AX - XB = Y$ より,

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

これより,  $2a - \alpha a = x \dots\dots\dots$ ,  $2b - \beta b = y \dots\dots\dots$

$$a + c - \alpha c = z \dots\dots\dots, \quad b + d - \beta d = w \dots\dots\dots$$

題意より, 任意の  $x, y, z, w$  に対して,  $\sim$  を満たす  $a, b, c, d$  が存在する条件を求め.

より,  $(2 - \alpha)a = x$  となるが,  $\alpha = 2$  のとき, 任意の  $x$  に対して成立しないので,  $\alpha \neq 2$  である.

$$\text{このとき, } a = \frac{x}{2 - \alpha} \text{ となる.}$$

より,  $(2 - \beta)b = y$  となるが,  $\beta = 2$  のとき, 任意の  $y$  に対して成立しないので,  $\beta \neq 2$  である.

$$\text{このとき, } b = \frac{y}{2 - \beta} \text{ となる.}$$

より,  $(1 - \alpha)c = z - a$  となるが,  $\alpha = 1$  のとき, 任意の  $z$  に対して成立しないので,  $\alpha \neq 1$  である.

$$\text{このとき, } c = \frac{z}{1 - \alpha} - \frac{a}{1 - \alpha} = \frac{z}{1 - \alpha} - \frac{x}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \text{ となる.}$$

より,  $(1 - \beta)d = w - b$  となるが,  $\beta = 1$  のとき, 任意の  $w$  に対して成立しないので,  $\beta \neq 1$  である.

$$\text{このとき, } d = \frac{w}{1 - \beta} - \frac{b}{1 - \beta} = \frac{w}{1 - \beta} - \frac{y}{(1 - \beta)(2 - \beta)} \text{ となる.}$$

以上より, 求める条件は,  $\alpha \neq 1$  かつ  $\alpha \neq 2$  かつ  $\beta \neq 1$  かつ  $\beta \neq 2$  である.

### [ 解 説 ]

初めは対角行列の性質が関係するのとも思いましたが, いったん成分計算をすると, 連立方程式の解の存在条件を求めることに等しいことがわかりました.

5

円の中心は、2 点  $1, -1$  を結ぶ線分の垂直二等分線、すなわち虚軸上にあるので、中心を表す複素数を  $ki$  ( $k$  は実数) とおくことができる。

すると、円の半径は  $|ki - 1| = \sqrt{1 + k^2}$  となる。

条件より、 $|\alpha - ki| = \sqrt{1 + k^2}$ 、 $(\alpha - ki)(\bar{\alpha} + ki) = 1 + k^2$

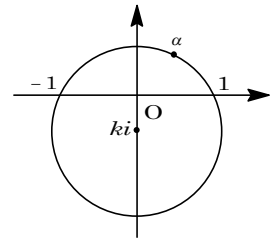
$$\alpha\bar{\alpha} + k\alpha i - k\bar{\alpha}i = 1 \dots\dots\dots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{さて、} \left| -\frac{1}{\alpha} - ki \right|^2 &= \left| \frac{1}{\alpha} + ki \right|^2 = \frac{|1 + k\bar{\alpha}i|^2}{|\alpha|^2} = \frac{(1 + k\bar{\alpha}i)(1 - k\alpha i)}{\alpha\bar{\alpha}} \\ &= \frac{1 - k\alpha i + k\bar{\alpha}i + k^2\alpha\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}} \end{aligned}$$

$$(*) \text{より、} \left| -\frac{1}{\alpha} - ki \right|^2 = \frac{(1 + k^2)\alpha\bar{\alpha}}{\alpha\bar{\alpha}}, \quad \left| -\frac{1}{\alpha} - ki \right| = \sqrt{1 + k^2}$$

よって、点  $-\frac{1}{\alpha}$  は、3 点  $1, -1, \alpha$  を通る円周上にある。

問題のページへ



## [ 解 説 ]

同一円周上にある条件を、距離を用いて示そうか、それとも角を用いて示そうかと迷いました。後者の方法は角の向き処理が面倒そうだったので、前者の立場で解きました。

6

問題のページへ

操作がすべて終了した後、赤玉が番号  $N+1$  の箱に入っている場合は、第  $N$  回の操作が終わったとき、赤玉が番号 1 から  $N$  のいずれかの箱に入っており、第  $N+1$  回目の操作で、その赤玉の入っている番号の箱を選び、番号  $N+1$  の箱に入っている白玉と交換する場合に限られる。

まず、第  $N$  回の操作が終わったとき、赤玉が番号  $N+1$  の箱に入っているのは、1 回から  $N$  回までの操作で、番号  $N+1$  の箱に入っている赤玉とそれ以外の箱に入っている白玉との交換が一度もない場合だけで、その確率は  $\left(\frac{N-1}{N}\right)^N$  である。

これより、1 回から  $N$  回までの操作で、少なくとも 1 回、番号  $N+1$  の箱を選んで、番号  $k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) の箱に入っている白玉と交換し、第  $N$  回の操作が終わったとき、白玉が番号  $N+1$  の箱に入っている確率は、 $1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N$  となる。

さらに、 $N+1$  回目の操作で、番号 1 から  $N$  までの箱のいずれかに入っている赤玉を選び、番号  $N+1$  の箱にある白玉と交換する確率は、 $\frac{1}{N}$  である。

以上より、操作がすべて終了した後、赤玉が番号  $N+1$  の箱に入っている確率は、 $\left\{1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^N\right\} \cdot \frac{1}{N}$  となる。

### [ 解 説 ]

赤玉が第  $k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) 回目の操作で、番号  $N+1$  の箱からいったん出たら、最後の第  $N+1$  回目の操作まで、番号  $N+1$  の箱に戻る可能性はありません。この点に気付くことがポイントです。実験すると、わかります。