1

問題のページへ

条件より，$\log\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\log\dfrac{n-1}{n+1}$ なので，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n-1}{n+1}$

$$(n+1)a_n=(n-1)a_{n-1},\quad n(n+1)a_n=(n-1)na_{n-1}$$

よって，$n(n+1)a_n=1\cdot 2\cdot a_1=2$ から，$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$$

[解 説]

昨年より基本的な問題で，すっきり解けます。漸化式の両辺に n をかける変形もよく見かけます。

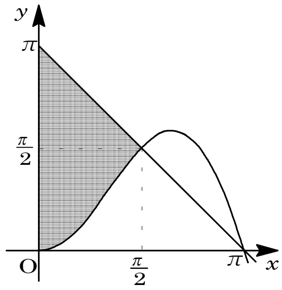
2

問題のページへ

$f(x)=x\sin x$ より，$f'(x)=\sin x+x\cos x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ より，点$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$における $y=f(x)$ の法線の傾きは-1となり，その方程式は,

$$y-\frac{\pi}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\quad y=-x+\pi$$



求める回転体の体積を V とすると,

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x+\pi)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2x\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{3}\Big[(-x+\pi)^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-x^2\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{\pi}{6}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}\Big[x^2\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx\right\}$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi}{2}\left\{-\frac{1}{2}\Big[x\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx\right\}$$

$$=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi^2}{8}$$

[解 説]

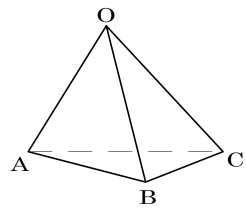
計算ミスに注意することが，最大のポイントです。

3

問題のページへ

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件(i)より，

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$



まとめて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$ ……①とおく。

また，条件(ii)より，$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}$ から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

①より，$|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{c}||\vec{a}|$

まとめて，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l$ ……②とおく。

ここで，①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})=k-k-k+l^2=l^2-k$$

すると，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{4(l^2-k)^2-(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}$$

さらに，$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OAB}$ より，$\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{l^4-k^2}$

$$3(l^2-k)^2=(l^2-k)(l^2+k),\ 3(l^2-k)=l^2+k,\ l^2=2k\ \cdots\cdots\cdots ③$$

③より，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{k}{l^2}=\dfrac{1}{2}$ から，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ となる。

同様にして，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ なので，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OBC}$，$\triangle\mathrm{OCA}$ は正三角形となり，四面体 OABC は正四面体である。

[解 説]

頂角が 60° の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。

4

問題のページへ

$x^2+x+1=0$ の解は $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ より，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ とおくと，

$$\omega^2+\omega+1=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\omega^2=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となるので，

$$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\omega^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$f(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおくと，①③より，

$$f(\omega)=(\omega^{100}+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1=(\omega+1)^{100}+(-\omega)^{100}+1$$
$$=(-\omega^2)^{100}+\omega^{100}+1=\omega^{200}+\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$$
$$f(\omega^2)=(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^4+1)^{100}+1=(\omega^2+1)^{100}+(\omega+1)^{100}+1$$
$$=(-\omega)^{100}+(-\omega^2)^{100}+1=\omega^{100}+\omega^{200}+1=\omega+\omega^2+1=0$$

よって，②より $f(x)$ は x^2+x+1 で割り切れる。

[解 説]

有名な 1 の虚立方根の問題です。次数の高い式の値を求めるのも，全く気になりません。

5

問題のページへ

k を実数として, A が E の実数倍かどうかで場合分けをする。

(i)　$A=kE$ のとき

$$B=rE+sA=rE+skE=(r+sk)E$$

$B\neq O$ ならば $r+sk\neq 0$ となり, B は逆行列 $B^{-1}=\dfrac{1}{r+sk}E$ をつねにもつ。

すなわち(＊)が成立する条件は, $a=d$ かつ $b=c=0$ である。

(ii)　$A\neq kE$ のとき

$B=rE+sA$ において，$B=O$ と $r=s=0$ は同値なので，$B\neq O$ は $r\neq 0$ または $s\neq 0$ と等しい。

まず，$s=0$ のときは $B\neq O$ より $r\neq 0$ となり，$B=rE$ は逆行列 $B^{-1}=\dfrac{1}{r}E$ をつねにもつ。

次に，$s\neq 0$ のときは $B\neq O$ である。

ここで，B の行列式を $\det B$ とおくと，逆行列 B^{-1} が存在する条件は，任意の実数 $r,\ s\,(s\neq 0)$ に対して，$\det B\neq 0$ である。

さて，$B=\begin{pmatrix} r+sa & sb \\ sc & r+sd \end{pmatrix}$ より，

$$\det B=(r+sa)(r+sd)-s^2bc=r^2+s(a+d)r+s^2(ad-bc)$$

$\det B=0$ を r の 2 次方程式とみて，その判別式を D とすると，求める条件は，

$$D=s^2(a+d)^2-4s^2(ad-bc)=s^2\{(a+d)^2-4(ad-bc)\}<0$$

$s^2>0$ より，$(a+d)^2-4(ad-bc)<0$，$(a+d)^2<4(ad-bc)$

このとき, A は E の実数倍とはならない。

(i)(ii)より, (＊)が成立する条件は $a=d$ かつ $b=c=0$ または $(a+d)^2<4(ad-bc)$

[解 説]

A と E が 1 次独立でないかどうかで場合分けをしました。しかし，この考え方は馴染みの薄いものでしょう。

6

問題のページへ

n チームを A_1, A_2, A_3, A_4, $\cdots$, A_n とし，以下 A_1 と A_2 が $n-2$ 勝 1 敗する場合を考える。

まず, A_1 と A_2 が対戦して, A_1 が勝ち, A_2 が負ける確率は $\frac{1}{2}$ である。

このとき, A_1 は残りの試合で A_3〜A_n と対戦して $n-3$ 勝 1 敗, A_2 は残りの試合で A_3〜A_n と対戦して $n-2$ 勝 0 敗でなくてはいけない。この確率は,

$$ {}_{n-2}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4} $$

ところで, A_1 が A_3〜A_n と対戦して 1 敗するチームが A_3 の場合, A_3 については A_2 との対戦で 1 敗しているので, 他の A_4〜A_n との対戦で少なくとも 1 敗しなくては, A_1 と A_2 だけが $n-2$ 勝 1 敗とはならない。この確率は, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ となる。

また, A_4, $\cdots$, A_n に対しては, A_1, A_2 との対戦で既に 2 敗しているので, 勝敗は任意で条件に適する。

以上まとめると, A_1 と A_2 が対戦して A_1 が勝ち, A_2 が負け, しかも A_1 と A_2 がともに $n-2$ 勝 1 敗の確率は,

$$ \frac{1}{2}\times(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}=(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} $$

次に, A_1 が負け, A_2 が勝つときも同様であり, また A_1, A_2, A_3, A_4, $\cdots$, A_n の中で, $n-2$ 勝 1 敗の 2 チームの選び方は ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$ 通りあるので, 求める確率は,

$$ (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}\times2\times\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} $$

となる。

[解 説]

文系にも類題があります。その類題では, 余事象を利用してを求めたややこしい確率が, 理系で出題されています。