

1

解答解説のページへ

条件より, $n(n-2)a_{n+1} = S_n (n-1) \dots\dots\dots$

$$(n-1)(n-3)a_n = S_{n-1} (n-2) \dots\dots\dots$$

$$- \text{より, } n(n-2)a_{n+1} - (n-1)(n-3)a_n = a_n, \quad n(n-2)a_{n+1} = (n-2)^2 a_n$$

$n \geq 3$ で, $na_{n+1} = (n-2)a_n$

$$n(n-1)a_{n+1} = (n-1)(n-2)a_n$$

よって, $(n-1)(n-2)a_n = (3-1)(3-2)a_3 = 2a_3$

$$a_n = \frac{2a_3}{(n-1)(n-2)} (n \geq 3)$$

ここで, $n=1$ を代入すると, $1 \cdot (-1)a_2 = S_1$, $-a_2 = a_1$ より, $a_2 = -a_1 = -1$

$$\text{さて, } n \geq 3 \text{ で, } S_n = a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^n a_k = 1 - 1 + \sum_{k=3}^n \frac{2a_3}{(k-1)(k-2)}$$

$$= 2a_3 \sum_{k=3}^n \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k-1} \right) = 2a_3 \left(1 - \frac{1}{n-1} \right)$$

条件より, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ なので, $2a_3 = 1$, $a_3 = \frac{1}{2}$

以上より, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)} (n \geq 3)$

[解 説]

に $n=2$ を代入して a_3 の値を求めようとしたのですが, $0 \cdot a_3 = 0$ となり, 何も得られませんでした。そこで, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$ の利用となったわけです。

2

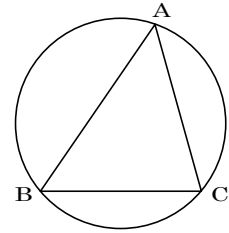
解答解説のページへ

(1) 正弦定理より, $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = 2$

$$AB = 2 \sin C, \quad BC = 2 \sin A, \quad CA = 2 \sin B$$

このとき, 条件より $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$ なので,

$$\begin{aligned} AB^2 + CA^2 - BC^2 &= AB^2 + CA^2 + BC^2 - 2BC^2 \\ &> 8 - 2BC^2 = 8 - 2 \cdot 4 \sin^2 A \\ &= 8(1 - \sin^2 A) = 0 \end{aligned}$$



よって, $A < \frac{\pi}{2}$ となる。

同様にして, $AB^2 + BC^2 - CA^2 > 8 - 2CA^2 = 8(1 - \sin^2 B) = 0$

$$BC^2 + CA^2 - AB^2 > 8 - 2AB^2 = 8(1 - \sin^2 C) = 0$$

よって, $B < \frac{\pi}{2}, \quad C < \frac{\pi}{2}$

以上より, $\triangle ABC$ は鋭角三角形である。

(2) $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4\sin^2 C + 4\sin^2 A + 4\sin^2 B$
 $= 4\sin^2(\pi - A - B) + 4\sin^2 A + 4\sin^2 B$
 $= 4\{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A + B)\}$

ここで, $P = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2(A + B)$ とおいて,

$0 < A < \pi, 0 < B < \pi, 0 < A + B < \pi$ での最大値を求める。

まず, B を $0 < B < \pi$ で $B = B_0$ と固定する。

次に, $0 < A < \pi - B_0$ において,

$$P = \sin^2 A + \sin^2 B_0 + \sin^2(A + B_0)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dA} &= 2 \sin A \cos A + 2 \sin(A + B_0) \cos(A + B_0) = \sin 2A + \sin 2(A + B_0) \\ &= 2 \sin \frac{2A + 2A + 2B_0}{2} \cos \frac{2A - 2A - 2B_0}{2} = 2 \sin(2A + B_0) \cos B_0 \end{aligned}$$

(i) $\cos B_0 > 0$ ($0 < B_0 < \frac{\pi}{2}$) のとき

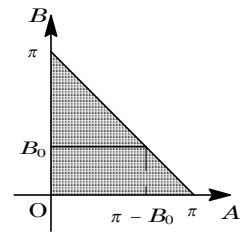
$B_0 < 2A + B_0 < 2\pi - B_0$ において, $\frac{dP}{dA} = 0$ となるのは,

$$2A + B_0 = \pi, \quad A = \frac{\pi - B_0}{2} \text{ のとき}$$

である。

右表より $A = \frac{\pi - B_0}{2}$ のとき P は最大となる。

$$\begin{aligned} \text{このとき, } P &= \sin^2 \frac{\pi - B_0}{2} + \sin^2 B_0 + \sin^2 \frac{\pi + B_0}{2} = 2 \cos^2 \frac{B_0}{2} + \sin^2 B_0 \\ &= 1 + \cos B_0 + 1 - \cos^2 B_0 = -\cos^2 B_0 + \cos B_0 + 2 \end{aligned}$$



A	0	...	$\frac{\pi - B_0}{2}$...	$\pi - B_0$
$\frac{dP}{dA}$		+	0	-	
P	$2 \sin^2 B_0$	\nearrow		\searrow	$2 \sin^2 B_0$

ここで、 B_0 を B に戻し、 $0 < B < \frac{\pi}{2}$ で変化させると、

$$P = -\cos^2 B + \cos B + 2 = -\left(\cos B - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$0 < \cos B < 1$ より、 P の最大値は $\frac{9}{4}$ となる。

(ii) $\cos B_0 = 0$ ($B_0 = \frac{\pi}{2}$) のとき

$$P = \sin^2 A + \sin^2 \frac{\pi}{2} + \sin^2\left(A + \frac{\pi}{2}\right) = \sin^2 A + 1 + \cos^2 A = 2$$

(iii) $\cos B_0 < 0$ ($\frac{\pi}{2} < B_0 < \pi$) のとき

$0 < A < \pi - B_0$ における P の値の増減は右表のようになり、

$$P < 2\sin^2 B_0 < 2$$

(i)(ii)(iii) より、 $P = \frac{9}{4}$

$$\text{以上より、} AB^2 + BC^2 + CA^2 = 4P = 4 \cdot \frac{9}{4} = 9$$

等号が成立するのは $\cos B = \frac{1}{2}$ のとき、すなわち $B = \frac{\pi}{3}$ で、 $A = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ より、 ABC が正三角形の場合である。

[解説]

(2)は、1文字固定という考え方でいいいに解きました。本年度では一番難しい問題です。なお、(1)を利用すると、(i)の場合だけでOKです。

3

解答解説のページへ

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1$ のとき, $f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$

まず, $f(x) = 0$ の整数解は, 定数項 1 の約数 ± 1 だけである。

すると, 条件より, $f(x) = 0$ の整数解は, $x = 1$ を重解にもつとき, $x = -1$ を重解にもつとき, $x = \pm 1$ を解にもつときのいずれかである。

(i) $x = 1$ を重解にもつとき $f(1) = f'(1) = 0$ より,

$$1 + a + b + c + 1 = 0 \dots\dots\dots, \quad 4 + 3a + 2b + c = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より } c = -3a - 2b - 4 \dots\dots\dots, \quad \text{に代入して, } -2a - b - 2 = 0, \quad b = -2a - 2$$

$$\text{より, } c = -3a - 2(-2a - 2) - 4 = a$$

このとき, $f(x) = x^4 + ax^3 - (2a+2)x^2 + ax + 1 = (x-1)^2 \{x^2 + (a+2)x + 1\}$ となり, 条件より, $x^2 + (a+2)x + 1 = 0$ が虚数解をもつことより,

$$D = (a+2)^2 - 4 < 0, \quad (a+2-2)(a+2+2) < 0, \quad -4 < a < 0$$

a は整数なので, $a = -3, -2, -1$

以上より, $(a, b, c) = (-3, 4, -3), (-2, 2, -2), (-1, 0, -1)$

(ii) $x = -1$ を重解にもつとき $f(-1) = f'(-1) = 0$ より,

$$1 - a + b - c + 1 = 0 \dots\dots\dots, \quad -4 + 3a - 2b + c = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より } c = -3a + 2b + 4 \dots\dots\dots, \quad \text{に代入して, } 2a - b - 2 = 0, \quad b = 2a - 2$$

$$\text{より, } c = -3a + 2(2a - 2) + 4 = a$$

このとき, $f(x) = x^4 + ax^3 + (2a-2)x^2 + ax + 1 = (x+1)^2 \{x^2 + (a-2)x + 1\}$ となり, 条件より, $x^2 + (a-2)x + 1 = 0$ が虚数解をもつことより,

$$D = (a-2)^2 - 4 < 0, \quad (a-2-2)(a-2+2) < 0, \quad 0 < a < 4$$

a は整数なので, $a = 3, 2, 1$

以上より, $(a, b, c) = (3, 4, 3), (2, 2, 2), (1, 0, 1)$

(iii) $x = \pm 1$ を解にもつとき $f(1) = f(-1) = 0$ より,

$$1 + a + b + c + 1 = 0 \dots\dots\dots, \quad 1 - a + b - c + 1 = 0 \dots\dots\dots$$

$$\text{より } a + c = 0, \quad c = -a \dots\dots\dots, \quad \text{より } b = -2$$

このとき, $f(x) = x^4 + ax^3 - 2x^2 - ax + 1 = (x+1)(x-1)(x^2 - ax - 1)$

ところが, $x^2 - ax - 1 = 0$ の判別式 $D = a^2 + 4 > 0$ となり, $f(x) = 0$ は虚数解をもたない。よって, 条件に適さない。

(i)(ii)(iii)より, 複号同順として,

$$(a, b, c) = (\pm 3, 4, \pm 3), (\pm 2, 2, \pm 2), (\pm 1, 0, \pm 1)$$

[解 説]

整数解の候補が ± 1 と 2 つしかないので, ホッとします。

4

解答解説のページへ

(1) $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ に対して,

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) 曲線 $r = \theta$ 上の点を (x, y) とすると, $x = r \cos \theta = \theta \cos \theta$, $y = r \sin \theta = \theta \sin \theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 = (\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \theta \cos \theta)^2 = 1 + \theta^2$$

曲線 $r = \theta$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを l とすると,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2} d\theta = \left[\theta \sqrt{1+\theta^2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \theta \cdot \frac{2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}} d\theta \\ &= \pi \sqrt{1+\pi^2} - \int_0^\pi \frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta = \pi \sqrt{1+\pi^2} - \int_0^\pi \left(\sqrt{1+\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \right) d\theta \\ &= \pi \sqrt{1+\pi^2} - l + \left[\log(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \right]_0^\pi = \pi \sqrt{1+\pi^2} - l + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \\ 2l &= \pi \sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2}) \end{aligned}$$

$$\text{よって, } l = \frac{1}{2} \pi \sqrt{1+\pi^2} + \frac{1}{2} \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$$

[解 説]

(2)の部分積分による計算は有名なものですが, 経験がないと無理でしょう。

5

解答解説のページへ

$y = x^3 + 3ax^2 + 3bx \dots\dots$ に対して, $y' = 3x^2 + 6ax + 3b = 3(x^2 + 2ax + b)$

$y' = 0$ の判別式 $D/4 = a^2 - b$ より, $a^2 > b$ のときは
 $y' = 0$ は 2 つの異なる実数解 $x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$ をもち,
 これを $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とすると, のグラフ増減は右
 表のようになる。

x	...	α	...	β	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗		↘		↗

これより, ある c に対して, と $y = c$ のグラフは相異なる 3 つの交点をもつ。

また, $a^2 < b$ のときは $y' > 0$ となり, は単調増加関数になる。これより, どんな c をとっても, と $y = c$ のグラフは 1 個の共有点しかもたない。

以上より, と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつ条件は, $a^2 > b$ である。

さて, $a^2 > b$ のとき, と $y = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha \dots\dots$ のグラフの共有点は,

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha$$

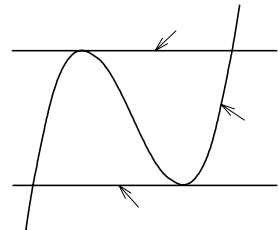
$$(x - \alpha)^2(x + 2\alpha + 3a) = 0$$

$$x = \alpha, x = -2\alpha + 3a$$

同様にして, と $y = \beta^3 + 3a\beta^2 + 3b\beta \dots\dots$ のグラフの共有点は,

$$x = \beta, x = -2\beta + 3a$$

右図より, と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつとき, これらの交点の x 座標のすべては, 开区間 $(-2\beta + 3a, -2\alpha + 3a) = (-a - 2\sqrt{a^2 - b}, -a + 2\sqrt{a^2 - b})$ に含まれている。



[解 説]

3 次関数のグラフについての文系風の基本問題です。

6

解答解説のページへ

$z_n - z_{n-1} = w_n$ とおき, $\alpha = \cos\theta^\circ + i\sin\theta^\circ$ とすると, 条件(ii)より,

$$w_{n+1} = \alpha w_n,$$

条件(i)より $z_0 = 0$, $z_1 = a$ なので, $w_n = w_1 \alpha^{n-1} = (a-0)\alpha^{n-1} = a\alpha^{n-1}$

よって, $z_n - z_{n-1} = a\alpha^{n-1}$

$$z_n = z_0 + (a + a\alpha + a\alpha^2 + \cdots + a\alpha^{n-1}) = a + a\alpha + a\alpha^2 + \cdots + a\alpha^{n-1}$$

$\alpha = 1$ のときは, $z_n = na$ となり, $a > 0$ から $z_n = z_0 = 0$ となる場合はない。

$\alpha \neq 1$ のときは, $z_n = \frac{a(1-\alpha^n)}{1-\alpha}$ であるので, $z_n = z_0 = 0$ となる条件は $\alpha^n = 1$

$$\cos(n\theta)^\circ + i\sin(n\theta)^\circ = 1$$

すなわち, m を整数として, $n\theta = 360 \times m$ である。

すると, $\theta = \frac{360m}{n}$ となり, θ は有理数である。

逆に, θ が有理数ならば $\theta = \frac{q}{p}$ とおき, $n = 360p$ を満たす n に対して,

$$\begin{aligned} \cos(n\theta)^\circ + i\sin(n\theta)^\circ &= \cos\left(\frac{nq}{p}\right)^\circ + i\sin\left(\frac{nq}{p}\right)^\circ \\ &= \cos(360q)^\circ + i\sin(360q)^\circ = 1 \end{aligned}$$

よって, $z_n = z_0 = 0$ となる。

以上より, $z_n = z_0 = 0$ となる n が存在するための必要十分条件は, θ が有理数ということである。

[解 説]

公比が虚数の等比数列と複素数平面上における点の回転を融合した頻出問題です。