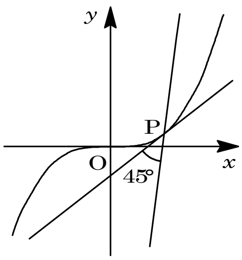
1

問題のページへ



$C: y=x^3$ より $y'=3x^2$ となるので，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線の傾きは $3t^2$ となる。この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta=3t^2$ である。

また，この接線を P のまわりに $45°$ 回転して得られる直線 L と, x 軸の正の向きとのなす角を φ とすると,

$$\tan\varphi=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan45°}{1-\tan\theta\tan45°}=\frac{3t^2+1}{1-3t^2}$$

よって，$t\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，直線 $L: y-t^3=\frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)$

なお，$t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，直線 L は $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ となり，条件を満たさない。

すると, C と L の共有点は，$x^3=\frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)+t^3$ より,

$$x^3-t^3-\frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)=0,\ (x-t)\left(x^2+tx+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)=0$$

よって，$x=t$ または $x^2+tx+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}=0$ ………①

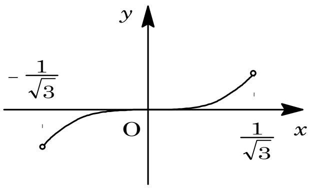
求める条件は，①が $x\neq t$ の異なる 2 実数解をもつことより,

$$t^2+t^2+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\neq0\ \cdots\cdots②,\ \ D=t^2-4\left(t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)>0\ \cdots\cdots③$$

②は $\frac{9t^4+1}{3t^2-1}\neq0$ となるので，つねに成立する。

③より，$\frac{9t^4+9t^2+4}{3t^2-1}<0$，$3t^2-1<0$

よって，$-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ より，点 P の範囲を図示すると右図のようになる。



[解 説]

穏やかな第 1 問でした。方針に迷いが生ずることはなく，どんどん計算を進めていくことができます。

$\boxed{2}$

問題のページへ

条件より，k を実数として，$x = ki$ とおき，$x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - (a+1)x + a = 0$ に代入すると，

$$k^5 i + k^4 + k^3 i - k^2 - (a+1)ki + a = 0$$

$$(k^4 - k^2 + a) + (k^5 + k^3 - ak - k)i = 0$$

k, a が実数より，

$$k^4 - k^2 + a = 0 \cdots\cdots ①,\quad k^5 + k^3 - ak - k = 0 \cdots\cdots ②$$

①より $a = -k^4 + k^2$ なので，②に代入して，

$$k^5 + k^3 - (-k^4 + k^2)k - k = 0,\quad k(2k^4 - 1) = 0$$

よって，$k = 0$ または $k^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(i)　$k = 0$ のとき　①より $a = 0$

(ii)　$k^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　①より $a = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

(i)(ii)より，$a = 0,\ \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

[解 説]

計算ミスをしなければ，正解に到達するという基本問題です。なお，文系に類題が出ています。

3

問題のページへ

条件より，$a_n=i^{f(n)}=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=\cos\dfrac{n(n-1)}{4}\pi+i\sin\dfrac{n(n-1)}{4}\pi$

$$a_{n+k}=\cos\frac{(n+k)(n+k-1)}{4}\pi+i\sin\frac{(n+k)(n+k-1)}{4}\pi$$

$a_{n+k}=a_n$ なので, m を整数として,

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{4}\pi=2m\pi+\frac{n(n-1)}{4}\pi$$

$$(n+k)(n+k-1)=8m+n(n-1)\,,\ \ k(2n+k-1)=8m\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，(＊)に $n=0$, $n=1$ を代入すると，$k(k-1)$, $k(k+1)$ がともに 8 の倍数となるが，$k-1$, $k+1$ がともに 8 の倍数となることはないので, k が 8 の倍数である。

逆に k が 8 の倍数であるとき，任意の整数 n に対して(＊)は明らかに成立する。

よって，任意の整数 n に対して，ある整数 m が存在する条件は k が 8 の倍数，すなわち，$k=8l$ ($l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) である。

[解 説]

式変形の結果，得られた(＊)には，とまどってしまいます。このようなときは，必要条件を求め，そのあと十分性を確認するという流れでうまくいくことがよくあります。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\cdots$, $\mathrm{P}_6(x_6,\ y_6,\ z_6)$とし, $\vec{v}=(1,\ 0,\ 0)$とおいても一般性は失われない。

すると, 条件より, 任意の k, m に対して$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}=x_m-x_k\neq 0$なので, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6の間に大小関係が生じ, その中で最大なものをx_kとおくと, kと異なるすべてのmに対して, $x_m-x_k<0$となる。

すなわち, k と異なるすべての m に対して, $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}<0$が成り立つような点$\mathrm{P}_k$が存在する。

[解 説]

成分を用いた解を考えました。書き方がやや雑な感じもしますが……。なお, 文系に類題が出ています。

5

問題のページへ

(1)　まず，$n=2$ のとき，$1\leqq k_1\leqq p-1$，$1\leqq k_2\leqq p-1$ として，

$z_1{}^p=1$ かつ $z_1\neq 1$ より，$z_1=\cos\dfrac{2\pi}{p}k_1+i\sin\dfrac{2\pi}{p}k_1$

$z_2{}^p=1$ かつ $z_2\neq 1$ より，$z_2=\cos\dfrac{2\pi}{p}k_2+i\sin\dfrac{2\pi}{p}k_2$

また，$z_1z_2=1$ より l を整数として，$\dfrac{2\pi}{p}k_1+\dfrac{2\pi}{p}k_2=2l\pi$，$k_1+k_2=lp$

$2\leqq k_1+k_2\leqq 2p-2<2p$ より $l=1$ となるので，$k_1+k_2=p$ ………①

すると，①を満たす $(k_1,\ k_2)$ は，k_1 の値を決めると k_2 の値が 1 つずつ決まることより $p-1$ 組あり，$a_2=p-1$ である。

次に，$n=3$ のとき，同様にして，

$$z_j=\cos\frac{2\pi}{p}k_j+i\sin\frac{2\pi}{p}k_j,\ 1\leqq k_j\leqq p-1\ (j=1,\ 2,\ 3)$$

$z_1z_2z_3=1$ より l を整数として，$k_1+k_2+k_3=lp$ ………②

なお，$3\leqq k_1+k_2+k_3\leqq 3p-3<3p$ より $l\leqq 2$ となる。

すると，②を満たす $(k_1,\ k_2,\ k_3)$ は，$k_1+k_2\neq p$ のとき $(k_1,\ k_2)$ の値を決めると k_3 の値が 1 つずつ決まることより $(p-1)^2-(p-1)$ 組あり，

$$a_3=(p-1)^2-(p-1)=(p-1)(p-2)$$

(2)　(1)と同様に設定して，

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}+k_{n+2}=lp\ (l\leqq n+1)\ \text{………③}$$

すると，③を満たす $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n+1},\ k_{n+2})$ は，$k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}\neq lp$ のとき，$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n+1})$ の値を決めると，k_{n+2} の値が 1 つずつ決まることより，

$$a_{n+2}=(p-1)^{n+1}-a_{n+1}$$

(3)　(1)(2)より，$a_2=p-1$，$a_{n+1}=(p-1)^n-a_n\ (n\geqq 2)$

漸化式を変形して，$a_{n+1}-\dfrac{1}{p}(p-1)^{n+1}=-\left\{a_n-\dfrac{1}{p}(p-1)^n\right\}$

$$a_n-\frac{1}{p}(p-1)^n=\left\{a_2-\frac{1}{p}(p-1)^2\right\}(-1)^{n-2}=\left\{p-1-\frac{1}{p}(p-1)^2\right\}(-1)^{n-2}$$

$$=\frac{p-1}{p}(-1)^{n-2}=\frac{p-1}{p}(-1)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{p}\left\{(p-1)(-1)^n+(p-1)^n\right\}$

［解 説］

a_3 の値を求めることが(2)の誘導となっています。しかし，この設問からすでにややこしい，本年で一番の難問です。

6

問題のページへ

$nx = t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = n$ より，

$$I_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx = \int_0^{n^2\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\frac{1}{n}dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt\right|$$

ここで，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t\right)' = -\dfrac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t + e^{-\frac{t}{n}}\cos t$ ………①

$$\left(e^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)' = -\frac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\cos t - e^{-\frac{t}{n}}\sin t \text{ ………②}$$

①＋②×n より，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t + ne^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)' = -\dfrac{n^2+1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t$

$$e^{-\frac{t}{n}}\sin t = -\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{t}{n}}(\sin t + n\cos t)\right\}'$$

すると，$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt = -\frac{n}{n^2+1}\left[e^{-\frac{t}{n}}(\sin t + n\cos t)\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$

$$= -\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}n\cos k\pi - e^{-\frac{k-1}{n}\pi}n\cos(k-1)\pi\right\}$$

$$= -\frac{n^2}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k - e^{-\frac{k-1}{n}\pi}(-1)^{k-1}\right\} = -\frac{n^2}{n^2+1}(-1)^k(1+e^{\frac{\pi}{n}})e^{-\frac{k}{n}\pi}$$

よって，$\displaystyle I_n = \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k}{n}\pi} = \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}(1-e^{-\frac{\pi}{n}\cdot n^2})}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$

$$= \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})(1-e^{-n\pi})\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx = \lim_{n\to\infty}I_n = \frac{1}{\pi}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

[解 説]

積分と数列の和に関する超頻出問題です。正確な計算力がすべてです。