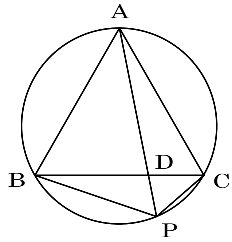
$\boxed{1}$

問題のページへ



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC} = p:(1-p)$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで，正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても，一般性は失われないので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2 = (1-p)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + 2(1-p)p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + p^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$= (1-p)^2 + (1-p)p + p^2 = 1 - p + p^2$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = \sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DP} = \mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$

$$\mathrm{DP} = \frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}} = \frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$\mathrm{AD}:\mathrm{AP} = \sqrt{1-p+p^2} : \left(\sqrt{1-p+p^2} + \dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$= (1-p+p^2) : (1-p+p^2+p-p^2)$$

$$= (1-p+p^2) : 1$$

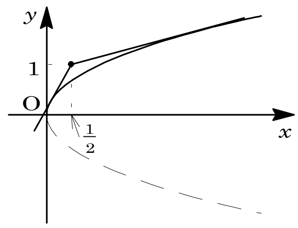
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

[解 説]

方べきの定理が活躍する構図の設問です。まず，1 問完答ではずみをつける問題です。

2

問題のページへ



(1)　$y=\sqrt{x}$ ……①，$y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ ……②

②より，$ay=2x+a-1$，$2x-1+a(1-y)=0$

これより，どんな a の値に対しても，直線②は $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$を通る。

さて，図より①と②が共有点をもつ条件と，$y=\pm\sqrt{x}$ と②が共有点をもつ条件は一致するので，これを連立し，

$$\pm\sqrt{x}=\frac{2}{a}x+1-\frac{1}{a},\quad a^2x=(2x+a-1)^2 \cdots\cdots\cdots③$$

よって，①と②が共有点をもつ条件は，③が実数解をもつ条件となる。

③を変形して，$4x^2-(a-2)^2x+(a-1)^2=0$ ………④

$$D=(a-2)^4-16(a-1)^2\geqq 0$$

$$\left\{(a-2)^2-4(a-1)\right\}\left\{(a-2)^2+4(a-1)\right\}\geqq 0,\ (a^2-8a+8)a^2\geqq 0$$

$0<a\leqq 2$ より，$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$

(2)　(1)より，③は $0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき実数解をもち，$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき共役な虚数解をもつ。

(i)　$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき

$0\leqq\alpha\leqq\beta$ より，$|\beta|$が最小となるのは，(1)の図より①と②が接する $a=4-2\sqrt{2}$ のときである。

このとき④より，$\beta=\dfrac{(a-2)^2}{8}=\dfrac{(2-2\sqrt{2})^2}{8}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2}$

$$|\beta|=\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

(ii)　$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき

$\beta=\overline{\alpha}$ なので，④に解と係数の関係を用いて，$\alpha\overline{\alpha}=\dfrac{(a-1)^2}{4}$

すなわち，$|\beta|^2=|\alpha|^2=\dfrac{(a-1)^2}{4}$ なので，$|\beta|=\dfrac{|a-1|}{2}$ となる。

すると，$|\beta|>\dfrac{|4-2\sqrt{2}-1|}{2}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

(i)(ii)より，$|\beta|$の最小値は $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$ である。

[解 説]

②の通過する定点が①のグラフの上側にあることを用いた直観的な解です。

3

問題のページへ

(1)　$\vec{c}=(p,\ q,\ r)$とおくと，$|\vec{c}|=1$より，$p^2+q^2+r^2=1$

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$から，

$$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}=p,\quad \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q$$

ここで，
$$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=p^2-p\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)+\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2$$
$$=\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{4}q^2=\frac{3}{4}(1-r^2)\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　(1)より，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-\dfrac{3}{4}\leqq 0$

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{3}{4}\leqq 0$$
$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\leqq 0$$
$$4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1\leqq 0$$
$$\{2\cos(\alpha+\beta)-1\}\{2\cos(\alpha-\beta)-1\}\leqq 0$$

ここで，$0\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$，$-\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\pi$ に注意して，

(i)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\geqq 0$ かつ $2\cos(\alpha-\beta)-1\leqq 0$ のとき

$$\cos(\alpha+\beta)\geqq\frac{1}{2}\cdots\cdots①,\quad \cos(\alpha-\beta)\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots②$$

①より，$0\leqq\alpha+\beta\leqq\dfrac{1}{3}\pi$ または $\dfrac{5}{3}\pi\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$

$$-\alpha\leqq\beta\leqq-\alpha+\frac{1}{3}\pi \text{ または } -\alpha+\frac{5}{3}\pi\leqq\beta\leqq-\alpha+2\pi$$

②より，$-\pi\leqq\alpha-\beta\leqq-\dfrac{1}{3}\pi$ または $\dfrac{1}{3}\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\pi$

$$\alpha+\frac{1}{3}\pi\leqq\beta\leqq\alpha+\pi \text{ または } \alpha-\pi\leqq\beta\leqq\alpha-\frac{1}{3}\pi$$

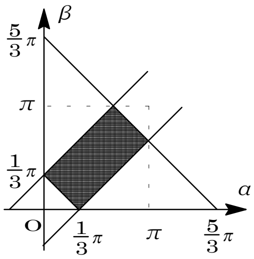
(ii)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\leqq 0$ かつ $2\cos(\alpha-\beta)-1\geqq 0$ のとき

$$\cos(\alpha+\beta)\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots③,\quad \cos(\alpha-\beta)\geqq\frac{1}{2}\cdots\cdots④$$

③より $\dfrac{1}{3}\pi\leqq\alpha+\beta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$，$-\alpha+\dfrac{1}{3}\pi\leqq\beta\leqq-\alpha+\dfrac{5}{3}\pi$

④より $-\dfrac{1}{3}\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\dfrac{1}{3}\pi$，$\alpha-\dfrac{1}{3}\pi\leqq\beta\leqq\alpha+\dfrac{1}{3}\pi$

(i)(ii)より，点$(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$ の範囲は右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



[解　説]

(2)は，もとの設定を無視して不等式を変形していくと，結論が見えてきます。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

$z=(a+bi)^p$ の虚部を I_p とおく。

(i)　$p=2$ のとき　$I_p=2ab>0$ より, z は虚数となる。

(ii)　$p\geqq 3$ のとき　p は素数なので, 奇数である。

$$I_p={}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}b-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^3+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-2}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^p(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$=b\left\{pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}$$

ここで $I_p=0$ とすると, $b>0$ より,

$$pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$pa^{p-1}={}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

$$=b^2\left\{{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-5}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-3}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

さて, a, b は自然数より, ${}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-5}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-3}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ は整数となり, ②の右辺は b^2 の倍数となる。

すると, ②の左辺も b^2 の倍数となるが, a と b は互いに素より, p が b^2 の倍数となる。ところが, p は素数なので $b=1$ しかありえない。

①より, $pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2(-1)^{\frac{p-3}{2}}+(-1)^{\frac{p-1}{2}}=0$

$$pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2(-1)^{\frac{p-3}{2}}=-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③の左辺は a^2 の倍数となるが, 右辺は ± 1 なので, $a>0$ より, $a=1$

以上より, $a=b=1$ の場合だけとなるので,

$$z=(1+i)^p=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^p=2^{\frac{p}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}p+i\sin\frac{\pi}{4}p\right)$$

すると, $\arg z=\dfrac{\pi}{4}p$ となるが, p が素数より, $\dfrac{p}{4}$ は整数となりえない。

すなわち, $\arg z$ は π の整数倍とはならないので, z は虚数となる。

(i)(ii)より, いずれの場合も $(a+bi)^p$ は実数ではない。

[解　説]

(ii)の場合, いきなり上の解を思いついたわけではありません。$p=3$, 5, 7 と具体的に考え, その結果を一般的に記述したにすぎません。

$\boxed{5}$ 問題のページへ

(1) 部分積分を用いて,

$$c_{n+2}=(n+3)\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx$$
$$=(n+3)\left\{\frac{1}{\pi}\Big[\,x^{n+2}\sin\pi x\,\Big]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1(n+2)x^{n+1}\sin\pi x\,dx\right\}$$
$$=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx$$
$$=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\left\{-\frac{1}{\pi}\Big[\,x^{n+1}\cos\pi x\,\Big]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1(n+1)x^n\cos\pi x\,dx\right\}$$
$$=\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(-1)-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(n+1)\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx$$
$$=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(1+c_n)$$

(2) $|c_n|=(n+1)\left|\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx\right|\leqq(n+1)\int_0^1\left|x^n\cos\pi x\right|dx$ ………①

$0\leqq x\leqq 1$ において, $\left|x^n\cos\pi x\right|\leqq x^n$ より,

$$(n+1)\int_0^1\left|x^n\cos\pi x\right|dx\leqq(n+1)\int_0^1 x^n dx=(n+1)\frac{1}{n+1}=1 \text{ ………②}$$

(1)より, $1+c_n=-\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$ なので, ①②より $|c_n|\leqq 1$ を用いて,

$$|1+c_n|=\frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}|c_{n+2}|\leqq\frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}$$

$n\to\infty$ のとき $|1+c_n|\to 0$ なので, $\lim_{n\to\infty}c_n=-1$

(3) (2)から, $c_n-c=c_n+1=-\dfrac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$ より,

$$c_{n+1}-c=-\frac{\pi^2}{(n+4)(n+3)}c_{n+3}$$

よって, $\dfrac{c_{n+1}-c}{c_n-c}=\dfrac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+3)}\cdot\dfrac{c_{n+3}}{c_{n+2}}=\dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{4}{n}}\cdot\dfrac{c_{n+3}}{c_{n+2}}$

(2)より, $\lim_{n\to\infty}c_n=-1$ なので, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}-c}{c_n-c}=\dfrac{1\times(-1)}{1\times(-1)}=1$

[解 説]

(1)の漸化式から, (2)の $\lim_{n\to\infty}c_n$ が -1 であることは容易に推測できます。後はこれを論理的に示せばよいことになります。

$\boxed{6}$

問題のページへ

(1)　サイコロの目を 5 で割った余りが 1 となる確率は$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$で，それ以外の場合の確率はそれぞれ$\dfrac{1}{6}$である。

ここで，$p_n(0)+p_n(1)+p_n(2)+p_n(3)+p_n(4)=1$に留意すると，

$$p_{n+1}(0)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{3}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(4)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(1)=\frac{1}{3}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(2)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{3}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{3}p_n(2)+\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(4)=\frac{1}{6}p_n(0)+\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(2)+\frac{1}{3}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(4)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}$$

(2)　条件より，$p_1(0)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(1)=\dfrac{1}{3}$，$p_1(2)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(3)=\dfrac{1}{6}$，$p_1(4)=\dfrac{1}{6}$

(1)の漸化式を用いて，$p_2(0)=p_2(1)=p_2(3)=p_2(4)=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{36}$

$$p_2(2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{9}$$

まず, $n\geqq 2$ で$m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$が成立することを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$のとき　$m_2=\dfrac{7}{36}$，$M_2=\dfrac{2}{9}$より，$m_2\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_2$

(ii)　$n=j$のとき　$m_j\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_j$と仮定する。

このとき，$M_{j+1}=\dfrac{1}{6}M_j+\dfrac{1}{6}\geqq\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{5}$

$$m_{j+1}=\frac{1}{6}m_j+\frac{1}{6}\leqq\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$$

(i)(ii)より, $n\geqq 2$ で$m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$が成立する。

次に，任意の k，l（$0\leqq k$，$l\leqq 4$）に対して，$m_n\leqq p_n(k)\leqq M_n$，$m_n\leqq p_n(l)\leqq M_n$が成立するので,

$$\begin{aligned}p_{n+1}(k)-p_{n+1}(l)&\leqq M_{n+1}-m_{n+1}\\&=\left(\frac{1}{6}M_n+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}m_n+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{6}(M_n-m_n)\end{aligned}$$

(3)　$M_{n+1}=\frac{1}{6}M_n+\frac{1}{6}$，$m_{n+1}=\frac{1}{6}m_n+\frac{1}{6}$ より，$M_{n+1}-m_{n+1}=\frac{1}{6}(M_n-m_n)$

$$M_n-m_n=(M_1-m_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

すると, $n\to\infty$ のとき $M_n-m_n\to 0$ となる。

さらに(2)より，$m_n\leqq\frac{1}{5}\leqq M_n$ なので，$n\to\infty$ のとき $m_n\to\frac{1}{5}$，$M_n\to\frac{1}{5}$

したがって，$m_n\leqq p_n(k)\leqq M_n$ から，$\lim_{n\to\infty}p_n(k)=\frac{1}{5}$

[解 説]

(1)の 5 種類の漸化式の形が同じなので，最大値 M_n についての漸化式，最小値 m_n についての漸化式を作りました。そのため，(3)では M_n と m_n の一般項が求まるのですが, (2)の結果 $m_n\leqq\frac{1}{5}\leqq M_n$ を利用するために，迂回した解法をとりました。