1　解答解説のページへ

円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p\ (0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。

2　解答解説のページへ

実数aは$0 < a \leqq 2$の範囲を動くものとする。

(1)　$y=\sqrt{x}$と$y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$のグラフが共有点をもつような$a$の範囲を求めよ。

(2)　2 次方程式$(2x+a-1)^2=a^2x$の複素数の範囲で考えた 2 つの解をα，β（ただし$|\alpha| \leqq |\beta|$）とする。このとき，$|\beta|$の最小値を求めよ。

3　解答解説のページへ

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル$\vec{c}$に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$とおく。このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

$$(*)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　不等式(＊)を満たす$(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$の範囲を図示せよ。

4　　解答解説のページへ

p を素数，a，b を互いに素な正の整数とするとき，$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。

5

解答解説のページへ

数列$\{c_n\}$を次の式で定める。

$$c_n = (n+1)\int_0^1 x^n \cos \pi x \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

このとき,

(1)　c_nとc_{n+2}の関係を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値をcとするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c}{c_n-c}$を求めよ。

6　解答解説のページへ

n, k は整数で，$n \geqq 2$，$0 \leqq k \leqq 4$ とする。サイコロを n 回投げて出た目の和を 5 で割ったときの余りが k に等しくなる確率を $p_n(k)$ とする。

(1)　$p_{n+1}(0)$，…，$p_{n+1}(4)$ を $p_n(0)$，…，$p_n(4)$ を用いて表せ。

(2)　$p_n(0)$，…，$p_n(4)$ の最大値を M_n，最小値を m_n とするとき，次の(イ)，(ロ)が成立することを示せ。

(イ)　$m_n \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_n$

(ロ)　任意の k, l（$0 \leqq k, l \leqq 4$）に対し，$p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leqq \dfrac{1}{6}(M_n - m_n)$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n(k)$ を求めよ。