1

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x) = |x-a|\sin x \geqq 0$

また，$0 \leqq x < a$ で $f(x) = -(x-a)\sin x$，$a \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x) = (x-a)\sin x$

まず，$F(x) = \displaystyle\int (x-a)\sin x\,dx = -(x-a)\cos x + \int \cos x\,dx$

$$= -(x-a)\cos x + \sin x + C$$

$$F(0) = a + C,\ F(a) = \sin a + C,\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + C$$

すると，$S = \displaystyle\int_0^a -(x-a)\sin x\,dx + \int_a^{\frac{\pi}{2}} (x-a)\sin x\,dx$

$$= -F(a) + F(0) + F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(a)$$

$$= a + 1 - 2\sin a$$

(2)　(1)より，$S' = 1 - 2\cos a$

$S' = 0$ とすると，$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ より $a = \dfrac{\pi}{3}$

右表より，$a = \dfrac{\pi}{3}$ のとき S は最小値をとり，

その値は $S = \dfrac{\pi}{3} + 1 - 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$-$	0	$+$	
S		↘		↗	

[解 説]

一般的に，面積を求める際には，関数のグラフを書くのが普通ですが，ここでは，$f(x) \geqq 0$ なので，グラフを省略しました。実際，増減を調べてグラフを書くには，関数 $f(x)$ に文字 a が入っているために，かなり複雑な計算が必要です。

2

問題のページへ

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ ………①

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数なので，①より $2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は整数となる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立であり，2 点 P, Q は格子点なので，s, t, u, v を整数として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|(u-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=(u-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2(u-s)(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(v-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \quad \cdots\cdots\cdots②$$

②の右辺の各項はすべて整数なので，任意の格子点 P，Q に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となる。

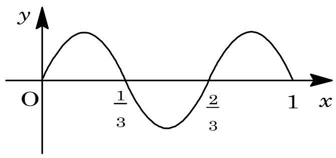
[解 説]

不気味なくらい簡単に証明ができてしまいます。何か「ひとひねり」あるのではないかと勘ぐってしまいます。

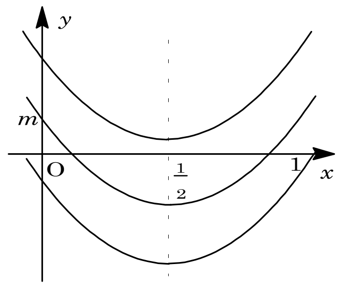
3

問題のページへ

$f(x)=(x^2-x+m)\sin 3\pi x$ に対して，$g(x)=x^2-x+m$，$h(x)=\sin 3\pi x$ とおくと，$f(x)=g(x)h(x)$ となる。



まず，$y=h(x)$ のグラフは右図のようになり，$h(x)$ $(0<x<1)$ は，$x=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ の前後で符号変化が起きる。



次に，$g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+m-\dfrac{1}{4}$ より，m の値に応じて，$y=g(x)$ グラフは右図のように変化する。

(i)　$m-\dfrac{1}{4}\geqq 0$ $\left(m\geqq\dfrac{1}{4}\right)$ のとき

$0<x<1$ で $g(x)\geqq 0$ より，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ の前後で符号変化が 2 回起きる。

(ii)　$m-\dfrac{1}{4}<0$ かつ $m>0$ $\left(0<m<\dfrac{1}{4}\right)$ のとき

$g(x)=0$ は $0<x<1$ に異なる 2 つの解をもつ。

(ii-i)　$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=g\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{2}{9}+m=0$ $\left(m=\dfrac{2}{9}\right)$ のとき

$0<x<\dfrac{1}{3}$ または $\dfrac{2}{3}<x<1$ で $g(x)>0$，$h(x)>0$ より $f(x)>0$，$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3}$ で $g(x)<0$，$h(x)<0$ より $f(x)>0$ となり，$f(x)$ は符号変化がない。

(ii-ii)　$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=g\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{2}{9}+m\neq 0$ $\left(m\neq\dfrac{2}{9}\right)$ のとき

$g(x)$ が符号変化する x と $h(x)$ が符号変化する $x=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ とは一致しないので，$f(x)$ は符号変化が 4 回起きる。

(iii)　$m\leqq 0$ のとき

$0<x<1$ で $g(x)<0$ より，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{2}{3}$ の前後で符号変化が 2 回起きる。

(i)(ii)(iii) より，求める個数は，$m=\dfrac{2}{9}$ のとき 0 個，$m\leqq 0$，$\dfrac{1}{4}\leqq m$ のとき 2 個，$0<m<\dfrac{2}{9}$，$\dfrac{2}{9}<m<\dfrac{1}{4}$ のとき 4 個となる。

[解 説]

$y=g(x)$ と $y=h(x)$ のグラフを見ながら考えれば明快です。なお，$y=g(x)$ も $y=h(x)$ も，ともに直線 $x=\dfrac{1}{2}$ について対称なため，場合分けが少なくなります。

$\boxed{4}$

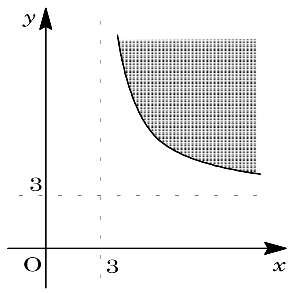
問題のページへ

(1) 条件より，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{3}$ ……①，$x>3$ ……②，$y>3$ ……③

①より，$\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-3}{3x}$

②③を考えて，$y\geqq\dfrac{3x}{x-3}=3+\dfrac{9}{x-3}$ ………④

②③④を図示すると，右図のようになる。ただし，境界線は含む。



(2) $2x+y=k$ とおくと，$y=-2x+k$ ………⑤

(1)の図より，④の境界線 $y=\dfrac{3x}{x-3}$ と⑤が接するとき，k の値は最小となる。

$\dfrac{3x}{x-3}=-2x+k$ より，$2x^2-(3+k)x+3k=0$ ………⑥

$$D=(3+k)^2-4\cdot2\cdot3k=0$$

$k^2-18k+9=0$ で，図から $k>3$ より，$k=9+6\sqrt{2}$

よって，$2x+y$ のとる値の最小値は $9+6\sqrt{2}$ となる。

このとき，⑥より $x=\dfrac{3+k}{4}=\dfrac{6+3\sqrt{2}}{2}$

⑤より $y=-2\cdot\dfrac{6+3\sqrt{2}}{2}+(9+6\sqrt{2})=3+3\sqrt{2}$

[解 説]

不等式で条件付けられた 2 変数関数の最小値を求める問題です。領域の考え方を利用してグラフ処理をするタイプで，頻出基本題の一つです。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$AX = tXA$ より，

$$\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{とおく} \right]$$

よって，$at^2 = at^3$，$bt^2 = bt^2$，$ct^2 = ct$，$dt = dt^3$，$et = et^2$，

$ft = ft$，$g = gt^3$，$h = ht^2$，$i = it$

条件より，$t \neq 0$，$t \neq \pm 1$なので，$a = c = d = e = g = h = i = 0$

以上より，$X = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$となる。ただし，$b$，$f$は任意は実数である。

このとき，$X^3 = X^2X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & bf \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(2)　$n \geqq 2$ で$(X + A)^n = A^n + b_nXA^{n-1} + c_nX^2A^{n-2}$と書けることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n = 2$のとき

$$(X + A)^2 = (A + X)(A + X) = A^2 + AX + XA + X^2 = A^2 + (t + 1)XA + X^2$$

$b_2 = t + 1$，$c_2 = 1$とすると，$n = 2$で成立する。

(ii)　$n = k$のとき

$(X + A)^k = A^k + b_kXA^{k-1} + c_kX^2A^{k-2}$と仮定する。

$$\begin{aligned}(X + A)^{k+1} &= (X + A)^k(X + A) = (A^k + b_kXA^{k-1} + c_kX^2A^{k-2})(A + X) \\ &= A^{k+1} + b_kXA^k + c_kX^2A^{k-1} + A^kX + b_kXA^{k-1}X + c_kX^2A^{k-2}X\end{aligned}$$

ここで，$A^kX = A^{k-1}AX = A^{k-1}tXA = tA^{k-1}XA$となるので，この操作を繰り返すと，$A^kX = t^kXA^k$，$A^{k-1}X = t^{k-1}XA^{k-1}$，$A^{k-2}X = t^{k-2}XA^{k-2}$

$$\begin{aligned}(X + A)^{k+1} &= A^{k+1} + (b_k + t^k)XA^k + (c_k + t^{k-1}b_k)X^2A^{k-1} + t^{k-2}c_kX^3A^{k-2} \\ &= A^{k+1} + (b_k + t^k)XA^k + (c_k + t^{k-1}b_k)X^2A^{k-1} \quad (X^3 = 0 \text{より})\end{aligned}$$

$b_{k+1} = b_k + t^k$，$c_{k+1} = c_k + t^{k-1}b_k$ ……(＊)とすると，$n = k + 1$のときも成立する。

(i)(ii)より, $n \geqq 2$で$(X + A)^n = A^n + b_nXA^{n-1} + c_nX^2A^{n-2}$と書ける。

また，b_{n+1}，c_{n+1}をb_n，c_nで表すと, (＊)より$b_{n+1} = b_n + t^n$，$c_{n+1} = c_n + t^{n-1}b_n$

[解　説]

2 年連続で 3×3 行列が出ましたが，今年の問題は注意深い計算が必要です。なお, (2)で$(X + A)^{k+1} = (X + A)(X + A)^k$とすると，別の漸化式が得られます。