1

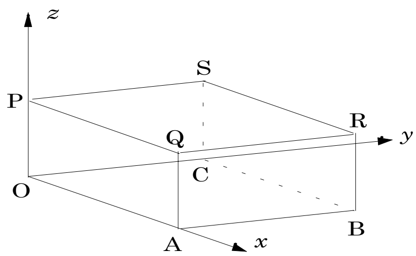
問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$　$(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$とおく。

$$(x,\ y,\ 1)=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+(0,\ 0,\ 1)$$

$$x=2s,\ \ y=2t\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{x}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{y}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=(2,\ 0,\ 1)-(0,\ 2,\ 0)=(2,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$

よって，$2x-2y+1=0$

(3)　(2)より，$y=x+\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2=x^2+y^2+1=x^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1=2x^2+x+\frac{5}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

ここで，$0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1$で①より，$0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\cdots\cdots\cdots③$

すると，$x=0$のとき$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2$は最小となるが，このとき②から$y=\dfrac{1}{2}$となり，これは③をみたす。よって，$(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$とき$|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$は最小値をとる。

[解 説]

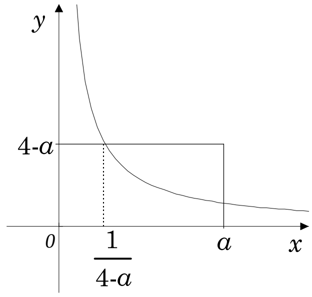
本問の(2)の設問「ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$がベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$と直交する」というのは，高校数学の立場に翻訳すると「ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$がベクトル$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$と垂直である」ということでしょう。なお今年，九大では，ベクトルの問題（文系 4D(1)③，理系 5D(1)②）において，問題用紙に「直交する」と書かれていた箇所を「垂直」に直すと問題文に訂正がありました。九大の上記の問題を参照してください。

2

問題のページへ

(1) $y=\dfrac{1}{x}$ と $y=4-a$ との交点は,

$\dfrac{1}{x}=4-a$ より, $x=\dfrac{1}{4-a}$



$0<a<4$ から,

$\dfrac{1}{4-a}\leqq a \iff 1\leqq a(4-a)$

$\iff 2-\sqrt{3}\leqq a\leqq 2+\sqrt{3}$

$\dfrac{1}{4-a}>a \iff 1>a(4-a)$

$\iff 0<a<2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}<a<4$

(i) $2-\sqrt{3}\leqq a\leqq 2+\sqrt{3}$ のとき

$$S(a)=(4-a)\cdot\frac{1}{4-a}+\int_{\frac{1}{4-a}}^{a}\frac{1}{x}dx=1+\Big[\log x\Big]_{\frac{1}{4-a}}^{a}=1+\log a(4-a)$$

(ii) $0<a<2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}<a<4$ のとき

$$S(a)=a(4-a)$$

(2) (1)より, $0<a<2-\sqrt{3}$ では $S(a)$ は単調増加, $2+\sqrt{3}<a<4$ では $S(a)$ は単調減少する。

また, $2-\sqrt{3}\leqq a\leqq 2+\sqrt{3}$ のとき,

$$S(a)=1+\log a(4-a)=1+\log\left\{-(a-2)^2+4\right\}\leqq 1+\log 4$$

ここで, $S(a)$ は連続的に変化するので, $S(a)$ の最大値は, $S(2)=1+\log 4$

[解 説]

曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ と長方形の辺が交わるかどうかで場合分けが必要です。ポイントはこの点だけです。

3

問題のページへ

(1) $$AB_1 - B_1A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_2 & -a_3 \\ b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ①$$

$$AB_2 - B_2A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_1 & a_1 - b_2 & -b_3 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) $AB = BA$ より，$AB - BA = O$

$B = B_1$ のとき①から，$a_2 = a_3 = b_1 = c_1 = 0$

$B = B_2$ のとき②から，$b_1 = b_3 = c_1 = 0$，$a_1 = b_2$

まとめると，$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ となる。

また，$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$$AB_3 - B_3A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c_2 & a_1 - c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$AB_3 - B_3A = O$ より，$c_2 = 0$，$a_1 = c_3$

以上から，$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} = a_1E$（E は 3×3 の単位行列）

逆に，$A = a_1E$ のとき任意の B に対して，$AB = BA = a_1E$ が成立する。

よって，任意の 3×3 行列 B に対して $AB = BA$ をみたす行列は，a_1 を任意の定数として，$A = a_1E$（E は 3×3 の単位行列）となる。

[解 説]

(2)は具体的な行列 B で必要条件を求め，その後で十分性を確認するという流れで解く典型問題です。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=(1-2x)^2x=x(2x-1)^2$ より，

$f'(x)=(2x-1)^2+4x(2x-1)$

$=(2x-1)(6x-1)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$x=\dfrac{1}{6}$ のとき，$f(x)$ は最大となる。

すなわち，$a=\dfrac{1}{6}$

(2)　箱 A と B_1 の相似比が $1:x$ から，体積比は $1:x^3$ となる。

$g(x)=x^3f(x)=x^4(2x-1)^2$

$g'(x)=4x^3(2x-1)^2+4x^4(2x-1)$

$=4x^3(2x-1)(3x-1)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$x=\dfrac{1}{3}$ のとき，$g(x)$ は最大となる。

すなわち，$b=\dfrac{1}{3}$

(3)　$h(x)=f'(x)+4g'(x)$ とおくと，

$$h\left(\frac{1}{6}\right)=f'\left(\frac{1}{6}\right)+4g'\left(\frac{1}{6}\right)=4g'\left(\frac{1}{6}\right)>0$$

$$h\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)+4g'\left(\frac{1}{3}\right)=f'\left(\frac{1}{3}\right)<0$$

ここで $h(x)$ は連続関数なので，$h(x)=0$ すなわち $f'(x)+4g'(x)=0$ は，区間 $\dfrac{1}{6}<x<\dfrac{1}{3}$ に少なくとも 1 つの解をもつ。

[解 説]

微分の応用題ですが，立式も計算も難しくありません。(3)の後に(4)の設問が続いて存在した気配のある問題です。

5

問題のページへ

(1)　$n=1$ のとき, A 地点から B 地点まで信号の逆転が起こらない確率は $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2$,

逆転が 2 回起こる確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ より,

$$P_2=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{8}$$

(2)

$$(a+b)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}b^{2k-1}\cdots\cdots\cdots①$$

$$(a-b)^{2n}=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}(-b)^{2k}+\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}(-b)^{2k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}-\sum_{k=1}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k-1}\,a^{2n-2k+1}b^{2k-1}\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より

$$(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=2\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,a^{2n-2k}b^{2k}\cdots\cdots\cdots③$$

(3)　A 地点から B 地点まで信号の逆転が, 0, 2, 4, ……, $2n$ 回のとき, 0 が 0 として伝わるので, $p_n=\dfrac{1}{4n}$, $q_n=1-\dfrac{1}{4n}$ とおくと,

$$P_n={q_n}^{2n}+{}_{2n}\mathrm{C}_2\,{p_n}^2{q_n}^{2n-2}+{}_{2n}\mathrm{C}_4\,{p_n}^4{q_n}^{2n-4}+\cdots\cdots\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-2}\,{p_n}^{2n-2}{q_n}^2+{p_n}^{2n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_{2n}\mathrm{C}_{2k}\,{q_n}^{2n-2k}{p_n}^{2k}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(q_n+p_n)^{2n}+(q_n-p_n)^{2n}\right\}\quad（③より）$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}$$

(4)

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(1-\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\left(1+\frac{1}{-2n}\right)^{-2n}\right)^{-1}\right\}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

[解　説]

最近はやりの通信を題材とした問題です。非常にていねいな誘導がついています。特に(1)は親切すぎるのではないかと思えるほどです。