1　解答解説のページへ

i を虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき $(3+i)^n$ を求めよ。またそれらの虚部の整数を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき $(3+i)^n$ は虚数であることを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$k,\ x,\ y,\ z$ を実数とする。k が以下の(1), (2), (3)のそれぞれの場合に，不等式

$$x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx) \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。また等号が成り立つのはどんな場合か。

(1)　$k=2$

(2)　$k=-1$

(3)　$-1<k<2$

3

解答解説のページへ

水平な地面に 1 本の塔が垂直に建っている(太さは無視する)。塔の先端を P とし，足元の地点を H とする。また，H を通らない 1 本の道が一直線に延びている(幅は無視する)。道の途中に 3 地点 A，B，C がこの順にあり，$BC = 2AB$ をみたしている。以下の問いに答えよ。

(1)　$2AH^2 - 3BH^2 + CH^2 = 6AB^2$ が成り立つことを示せ。

(2)　A，B，C から P を見上げた角度 $\angle PAH$，$\angle PBH$，$\angle PCH$ はそれぞれ 45°，60°，30° であった。$AB = 100$ m のとき，塔の高さ PH (m) の整数部分を求めよ。

(3)　(2)において，H と道との距離(m)の整数部分を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$(3+i)^2=9+6i+i^2=8+6i$，$(3+i)^3=27+27i+9i^2+i^3=18+26i$

$$(3+i)^4=(8+6i)^2=64+96i+36i^2=28+96i$$

$$(3+i)^5=(8+6i)(18+26i)=144+208i+108i+156i^2=-12+316i$$

$(3+i)^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ の虚部の整数を 10 で割った余りは，すべて 6 である。

(2)　$(3+i)^n$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ 5)$ の実部の整数を 10 で割った余りは，すべて 8 である。

これより，$n\geqq 2$ において，$(3+i)^n=a_n+b_ni$ とおくとき a_n，b_n は整数で，以下 mod10 として，$a_n\equiv 8$，$b_n\equiv 6$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$a_2=8$，$b_2=6$ より，成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$(3+i)^k=a_k+b_ki$ において，$a_k\equiv 8$，$b_k\equiv 6$ と仮定すると，

$$(3+i)^{k+1}=(a_k+b_ki)(3+i)=(3a_k-b_k)+(a_k+3b_k)i$$

これより，$a_{k+1}=3a_k-b_k$，$b_{k+1}=a_k+3b_k$ となり，a_{k+1}，b_{k+1} はともに整数で，

$$a_{k+1}\equiv 3\cdot 8-6\equiv 24-6\equiv 18\equiv 8,\quad b_{k+1}\equiv 8+3\cdot 6\equiv 8+18\equiv 26\equiv 6$$

よって，$n=k+1$ のときも成立している。

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき $(3+i)^n=a_n+b_ni$ において，$a_n\equiv 8$，$b_n\equiv 6$ である。

すると，$n\geqq 2$ において，$b_n\neq 0$ から $(3+i)^n$ は虚数となり，また $n=1$ のときも $(3+i)^n=3+i$ から虚数である。

よって，n を正の整数とするとき $(3+i)^n$ は虚数である。

［解 説］

複素数の n 乗を題材にした整数問題です。(1)の誘導で(2)の方針が決定できます。

© 電送数学舎 2021

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2\geqq 0$

なお，等号は $x+y+z=0$ のときに成立する。

(2)　$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=\dfrac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geqq 0$

なお，等号は $x-y=y-z=z-x=0$，すなわち $x=y=z$ のときに成立する。

(3)　$-1<k<2$ において，$F=x^2+y^2+z^2+k(xy+yz+zx)$ とおくと，

$$\begin{aligned}F&=x^2+k(y+z)x+y^2+kyz+z^2\\&=\left\{x+\frac{k}{2}(y+z)\right\}^2-\frac{k^2}{4}(y+z)^2+y^2+kyz+z^2\\&=\left\{x+\frac{k}{2}(y+z)\right\}^2+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)y^2+k\left(1-\frac{k}{2}\right)yz+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)z^2\\&=\left\{x+\frac{k}{2}(y+z)\right\}^2+\left(1-\frac{k^2}{4}\right)\left(y^2+\frac{2k}{k+2}yz+z^2\right)\end{aligned}$$

さらに，$G=y^2+\dfrac{2k}{k+2}yz+z^2$ とおくと，

$$G=\left(y+\frac{k}{k+2}z\right)^2-\left(\frac{k}{k+2}z\right)^2+z^2=\left(y+\frac{k}{k+2}z\right)^2+\frac{4(k+1)}{(k+2)^2}z^2$$

ここで，$-1<k<2$ から $\dfrac{4(k+1)}{(k+2)^2}>0$ となり，$G\geqq 0$ である。

すると，$F=\left\{x+\dfrac{k}{2}(y+z)\right\}^2+\left(1-\dfrac{k^2}{4}\right)G$ なので，$1-\dfrac{k^2}{4}>0$ から $F\geqq 0$ である。

なお，等号が成立するのは，

$$x+\frac{k}{2}(y+z)=0\ \text{かつ}\ y+\frac{k}{k+2}z=0\ \text{かつ}\ z=0$$

まとめると，$x=y=z=0$ のときである。

［解　説］

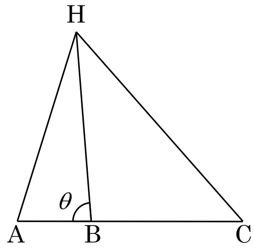
不等式の証明問題です。(1)と(2)は有名な恒等式を適用するだけです。(3)はやや面倒でしたが，まったく工夫をせずに平方完成で示しています。なお，F を k の関数としてとらえ，グラフが直線になることを利用すると，(1)と(2)が誘導になります。後で気付きましたが。

© 電送数学舎 2021

3

問題のページへ

(1) 塔の足元 H と 3 地点 A, B, C を通る道によってできる$\triangle$HAC において，$\mathrm{BC}=2\mathrm{AB}$ ……①である。ここで，$\angle\mathrm{HBA}=\theta$ とおき，$\triangle$HAB に余弦定理を適用すると，



$$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BH}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BH}\cos\theta \cdots\cdots\cdots②$$

また，$\triangle$HBC に余弦定理を適用すると，

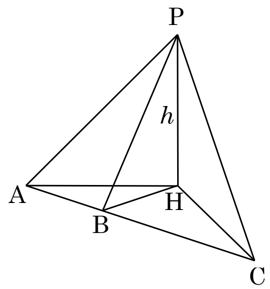
$$\mathrm{CH}^2=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BH}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BH}\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=\mathrm{BC}^2+\mathrm{BH}^2+2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BH}\cos\theta$$

ここで，①より，$\mathrm{CH}^2=4\mathrm{AB}^2+\mathrm{BH}^2+4\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BH}\cos\theta \cdots\cdots\cdots③$

②③より，$2\mathrm{AH}^2+\mathrm{CH}^2=(2\mathrm{AB}^2+2\mathrm{BH}^2)+(4\mathrm{AB}^2+\mathrm{BH}^2)$ となり，

$$2\mathrm{AH}^2-3\mathrm{BH}^2+\mathrm{CH}^2=6\mathrm{AB}^2 \cdots\cdots\cdots④$$

(2) 右図において，$\mathrm{PH}=h$ とおく。条件より，$\angle\mathrm{PAH}=45^\circ$，$\angle\mathrm{PBH}=60^\circ$，$\angle\mathrm{PCH}=30^\circ$ なので，$\mathrm{AH}=\dfrac{h}{\tan 45^\circ}=h$



$$\mathrm{BH}=\frac{h}{\tan 60^\circ}=\frac{h}{\sqrt{3}},\quad \mathrm{CH}=\frac{h}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}h$$

また，$\mathrm{AB}=100$ であり，これらを④に代入すると，

$$2h^2-3\cdot\frac{h^2}{3}+3h^2=6\cdot10^4,\quad 4h^2=6\cdot10^4$$

これより，$h^2=3\cdot5\cdot10^3$ から $h=50\sqrt{6}=10\sqrt{150}$ となり，

$$12.2^2<150<12.3^2,\quad 12.2<\sqrt{150}<12.3$$

よって，$122<h<123$ より，h の整数部分は 122 である。

(3) (2)より，$\mathrm{AH}=50\sqrt{6}$，$\mathrm{BH}=\dfrac{50\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=50\sqrt{2}$，$\mathrm{AB}=100$ を②に代入すると，

$$15\cdot10^3=10^4+5\cdot10^3-2\cdot10^2\cdot50\sqrt{2}\cos\theta,\quad \cos\theta=\frac{10^4+5\cdot10^3-15\cdot10^3}{10^4\sqrt{2}}=0$$

すると，$\cos\theta=0$ から $\theta=90^\circ$ となり，H と道との距離は $\mathrm{BH}=50\sqrt{2}=10\sqrt{50}$

$$7.0^2<50<7.1^2,\quad 7.0<\sqrt{50}<7.1$$

よって，$70<\mathrm{BH}<71$ より，BH の整数部分は 70 である。

［解 説］

三角比の応用についての基本題です。ただ，数値計算が煩雑です。なお，上の解答例は余弦定理より始めましたが，まず座標を設定する方法も考えられます。

© 電送数学舎 2021