1

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c,\ p$ は実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $(x-p)^2$ で割り切れるとする。以下の問いに答えよ。

(1)　b, c を a, p を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，$f'\left(p+\dfrac{4}{3}\right)=0$ をみたすとする。a を p を用いて表せ。

(3)　(2)の条件のもとで $p=0$ とする。曲線 $y=f(x)$ と $y=f'(x)$ の交点を x 座標が小さい方から順に A, B, C とし，線分 AB と曲線 $y=f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1，線分 BC と曲線 $y=f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とする。このとき，S_1+S_2 の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

n を自然数とし，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を次の(i), (ii)で定める。

(i)　$a_1 = b_1 = 1$ とする。

(ii)　$f_n(x) = a_n(x+1)^2 + 2b_n$ とし，$-2 \leqq x \leqq 1$ における $f_n(x)$ の最大値を a_{n+1}，最小値を b_{n+1} とする。

以下の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n について $a_n > 0$ かつ $b_n > 0$ であることを示せ。

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$c_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおく。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1) 和が 30 になる 2 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(2) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる順列の総数を求めよ。

(3) 和が 30 になる 3 つの自然数からなる組合せの総数を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を $(x-p)^2$ で割ると，

$$f(x)=(x-p)^2(x+a+2p)+(2ap+b+3p^2)x+(-ap^2+c-2p^3)$$

条件より，$2ap+b+3p^2=0$ かつ $-ap^2+c-2p^3=0$ となり，

$$b=-2ap-3p^2\cdots\cdots\cdots①,\ c=ap^2+2p^3\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　$f'(x)=3x^2+2ax+b$ となり，①を代入し，$f'\left(p+\dfrac{4}{3}\right)=0$ より，

$$3\left(p+\frac{4}{3}\right)^2+2a\left(p+\frac{4}{3}\right)-2ap-3p^2=0,\ 8p+\frac{16}{3}+\frac{8}{3}a=0$$

よって，$a=-3p-2\cdots\cdots③$ となる。

(3)　$p=0$ のとき，③より $a=-2$，①②より $b=c=0$ となり，

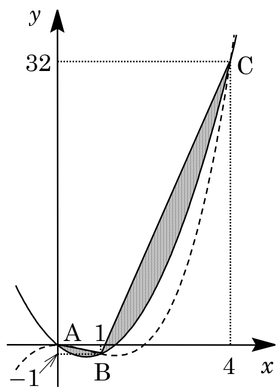
$$f(x)=x^3-2x^2,\ f'(x)=3x^2-4x$$

ここで，$y=f(x)$ と $y=f'(x)$ を連立すると，

$$x^3-2x^2=3x^2-4x,\ x(x-1)(x-4)=0$$

$x=0,\ 1,\ 4$ から，曲線 $y=f(x)$ と $y=f'(x)$ の交点は，

A$(0,\ 0)$，B$(1,\ -1)$，C$(4,\ 32)$



すると，直線 AB の方程式は $y=-x$，直線 BC の方程式は $y=\dfrac{33}{3}(x-1)-1=11x-12$ となる。

このとき，線分 AB と曲線 $y=f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_1，線分 BC と曲線 $y=f'(x)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，

$$S_1+S_2=\int_0^1\{-x-(3x^2-4x)\}dx+\int_1^4\{(11x-12)-(3x^2-4x)\}dx$$
$$=\int_0^1-3x(x-1)dx+\int_1^4-3(x-1)(x-4)dx$$
$$=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3-3\left(-\frac{1}{6}\right)(4-1)^3=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14$$

［解　説］

整式の除法が絡んだ定積分と面積についての基本題です。いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を利用する典型的なタイプです。

2

問題のページへ

(1)　すべての自然数 n について $a_n>0$ かつ $b_n>0$ であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=b_1=1$ より成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>0$ かつ $b_k>0$ と仮定する。

$-2\leqq x\leqq 1$ における $f_k(x)=a_k(x+1)^2+2b_k$ の最大値 a_{k+1}，最小値 b_{k+1} から，

$$a_{k+1}=f_k(1)=a_k(1+1)^2+2b_k=4a_k+2b_k\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{k+1}=f_k(-1)=a_k(-1+1)^2+2b_k=2b_k\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a_{k+1}>0$ かつ $b_{k+1}>0$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n について $a_n>0$ かつ $b_n>0$ である。

(2)　②より $b_{n+1}=2b_n$ となり，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$

(3)　①③より，$a_{n+1}=4a_n+2b_n=4a_n+2^n\cdots\cdots\cdots④$

ここで，$c_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと $a_n=2^nc_n$ となり，④に代入すると，

$$2^{n+1}c_{n+1}=4\cdot 2^nc_n+2^n,\quad c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}$$

この式を，$c_{n+1}+\dfrac{1}{2}=2\left(c_n+\dfrac{1}{2}\right)$ と変形して，

$$c_n+\frac{1}{2}=\left(c_1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=\left(\frac{a_1}{2^1}+\frac{1}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

よって，$c_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}$ である。

［解　説］

漸化式の基本題です。省エネで済むように，丁寧な誘導がついています。

3

問題のページへ

(1)　$a+b=30$ を満たす 2 つの自然数 a, b の順列の総数は，右図のように 30 個の球を 1 列に並べ，その間の 29 か所のうち 1 か所を選んでしきりを入れ，しきりの左側の球の個数を a, 右側の球の個数を b に対応させると考えて，

◯ ⋯ ◯ ◯｜◯ ◯ ◯ ⋯ ◯

a 個　　b 個

$$ {}_{29}\mathrm{C}_1 = 29 \quad (\text{個}) $$

(2)　$a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の順列の総数は，右図のように 30 個の球を 1 列に並べ，その間の 29 か所のうち 2 か所を選んでしきりを入れ，左側のしきりの左側の球の個数を a, 2 つのしきりの間の球の個数を b, 右側のしきりの右側の球の個数を c に対応させると考えて，

◯ ⋯ ◯｜◯ ⋯ ◯｜◯ ⋯ ◯

a 個　　b 個　　c 個

$$ {}_{29}\mathrm{C}_2 = \frac{29\times 28}{2} = 406 \quad (\text{個}) $$

(3)　$a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の順列のうち，

(i)　a, b, c の 3 つが同じもの　$(a,\ b,\ c)=(10,\ 10,\ 10)$ だけなので 1 個。

(ii)　a, b, c の 2 つだけが同じもの

$\{a,\ b,\ c\}=\{1,\ 1,\ 28\}$, $\{2,\ 2,\ 26\}$, $\cdots$, $\{9,\ 9,\ 12\}$, $\{11,\ 11,\ 8\}$, $\cdots$, $\{14,\ 14,\ 2\}$ の 13 種類より，$(a,\ b,\ c)$ の個数は $13\times 3=39$ 個。

(iii)　a, b, c がすべて異なるもの　$(a,\ b,\ c)$ の個数は $406-(1+39)=366$ 個。

(i)(ii)(iii)より，$a+b+c=30$ を満たす 3 つの自然数 a, b, c の組合せの総数は，

$$ 1+\frac{39}{3}+\frac{366}{3!}=1+13+61=75 \quad (\text{個}) $$

［解　説］

場合の数の頻出題です。(1)と(2)は，有名なテクニカルな方法で記しています。