1

問題のページへ

(1)　加法定理を利用すると,

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

(2)　$z=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\Bigr)$のとき, (1)より,

$$z\Bigl(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\Bigr)=\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\Bigr)\Bigl(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\Bigr)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\cos\frac{2(k+1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(k+1)\pi}{n}\Bigr)$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\Bigr)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, $\cos\dfrac{2(n+1)\pi}{n}+i\sin\dfrac{2(n+1)\pi}{n}=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ より,

$$\sum_{k=2}^{n+1}\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\Bigr)=\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\Bigr)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $z\Bigl(\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}\Bigr)=z$

(3)　(2)より, $z\Bigl(\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}-1\Bigr)=0\cdots\cdots\cdots③$

さて, $n\geqq2$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\pi$ となり, $\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}\neq1$

よって, ③から $z=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Bigl(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\Bigr)=0$ となり, 実部, 虚部を比べ,

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2k\pi}{n}=0$$

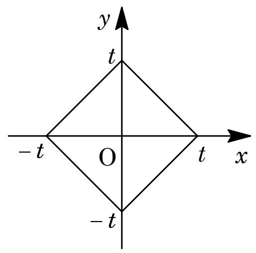
[解 説]

現行の課程では複素数が冷遇されているため, 複素数の極形式に関する問題は, あまり見かけなくなりました。しかし, 次の課程では復活しますので, その先取りでしょうか。

2

問題のページへ

(1)　$t>0$ のとき，$|x|+|y|=t$ ……①に対して，



(i)　$x\geqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$x+y=t$

(ii)　$x\leqq 0,\ y\geqq 0$ のとき　$-x+y=t$

(iii)　$x\leqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$-x-y=t$

(iv)　$x\geqq 0,\ y\leqq 0$ のとき　$x-y=t$

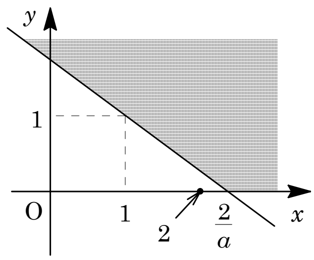
(i)～(iv)より，①で表される図形は右図の正方形である。

(2)　$a\geqq 0$ のとき，連立不等式 $ax+(2-a)y\geqq 2$ ……②，$y\geqq 0$ ……③で表される領域は，まず②の境界線 $ax+(2-a)y=2$ ……②′に対して，

$$a(x-y)+2y-2=0$$

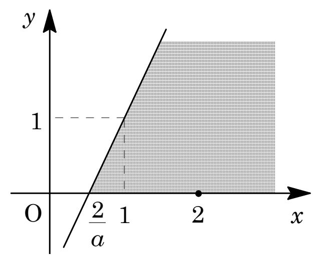
すると，0 以上の任意の実数 a に対して，$x=y=1$ で成立することから，直線②′はつねに点 $(1,\ 1)$ を通る。また，直線②′は，$a=0$ のとき $y=1$ となり x 軸に平行になり，$a>0$ のとき x 軸と交わり，その交点は点 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ である。

さらに，$x=y=0$ のとき②は成立しないので，不等式②の表す領域は，直線②′を境界線とする原点を含まない側である。



(i)　$a=0$ または $\dfrac{2}{a}\geqq 2$ $(0\leqq a\leqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，y 軸との交点 $\left(0,\ \dfrac{2}{2-a}\right)$ で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{2-a}$ をとる。

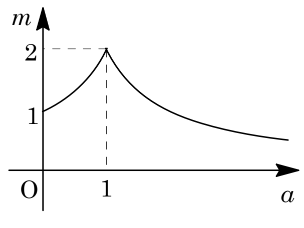


(ii)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 2$ $(a\geqq 1)$ のとき

連立不等式②かつ③で表される領域は右図の網点部となり，x 軸との交点 $\left(\dfrac{2}{a},\ 0\right)$ で，$|x|+|y|$ は最小値 $m=\dfrac{2}{a}$ をとる。

(i)(ii)より，$|x|+|y|$ の最小値 m は，

$$m=\frac{2}{2-a}\ \ (0\leqq a\leqq 1),\ \ m=\frac{2}{a}\ \ (a\geqq 1)$$



(3)　(2)より，a と m の関係をグラフに表すと右図のようになり，$a=1$ のとき m は最大値 2 をとる。

[解 説]

不等式②で表される領域を把握するために，あの手この手を用いています。これは，極力，場合分けを避けるためです。

3

問題のページへ

(1) $\displaystyle\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}=\int_n^{n^3}\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}dx=\Big[\log\big|\log x\big|\Big]_n^{n^3}=\log\big|3\log n\big|-\log\big|\log n\big|$

$\displaystyle=\log\left|\frac{3\log n}{\log n}\right|=\log 3$ ………①

(2) $x>1$ において，$f(x)=\dfrac{1}{x\log x}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{\log x+1}{(x\log x)^2}<0$

これより，$k\geqq 2$ のとき，$k\leqq x\leqq k+1$ において，$f(k+1)\leqq f(x)\leqq f(k)$ となり，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}\leqq\frac{1}{x\log x}\leqq\frac{1}{k\log k}$$

この不等式の各辺を k から $k+1$ まで積分すると，$\displaystyle\int_k^{k+1}dx=1$ から，

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\frac{1}{k\log k}\text{ ………②}$$

(3) ②の各辺を n から n^3-1 まで和をとると，

$$\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\int_k^{k+1}\frac{dx}{x\log x}<\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$$

$\displaystyle S_n=\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{k\log k}$ より，$\displaystyle\sum_{k=n}^{n^3-1}\frac{1}{(k+1)\log(k+1)}=S_n-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}$ となり，

$$S_n-\frac{1}{n\log n}+\frac{1}{n^3\log n^3}<\int_n^{n^3}\frac{dx}{x\log x}<S_n\text{ ………③}$$

①③より，$\displaystyle\log 3<S_n<\log 3+\frac{1}{n\log n}-\frac{1}{n^3\log n^3}$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 3$

[解 説]

はさみうちの原理を利用して極限値を求める問題ですが，方針に迷うことがないよう，たいへん丁寧な誘導がついています。

4

問題のページへ

(1)　整式$x^3+3x^2-14x+6$を整式x^2-2xで割ると,

$$x^3+3x^2-14x+6=(x^2-2x)(x+5)-4x+6$$

よって，商は$x+5$，余りは$-4x+6$である。

(2)　(1)より，$X=Y(a+5)-4a+6$ ……(＊)となり,

$$(-X+5Y+6)+(Y-4)a=0$$

XとYは有理数, aは無理数から，$-X+5Y+6=Y-4=0$

よって，$X=26$，$Y=4$

(3)　$Y=4$より，$a^2-2a-4=0$となり, $a>0$から，$a=1+\sqrt{5}$

このとき, (＊)から，$X=26$となる。

よって，$a=1+\sqrt{5}$

[解 説]

有理数と無理数を題材に，除法に関する等式をからめた問題です。計算も穏やかで文系風ですが，内容は受験生の意表を突くものです。

5

問題のページへ

(1)　$f(x)=x-2\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$x\geqq 1$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$f(2)=2-2\log 2=2(\log e-\log 2)>0$$

よって，$x\geqq 1$ のとき $f(x)>0$ から，$x>2\log x$

(2)　まず，$n=1$ のとき，$0<1$ から $(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ は成立する。

次に，2 以上の自然数 n に対して，(1)より，$2\log n<n$ となり，$2n\log n<n^2$

ここで，対数関数は単調増加関数より，

$$\log(2n\log n)<\log n^2,\ \ n\log(2n\log n)<2n\log n,\ \ \log(2n\log n)^n<2n\log n$$

よって，$(2n\log n)^n<e^{2n\log n}$ が成立する。

[解 説]

(2)は結論を同値変形したものを，順序を変えて記したものです。最後の問題なので，ひとひねりあるかとも思ったのですが……。