

1

解答解説のページへ

$i = \sqrt{-1}$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 実数 α, β について, 等式

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

が成り立つことを示せ。

- (2) 自然数 n に対して, $z = \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$ とおくと, 等式

$$z \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right) = z$$

が成り立つことを示せ。

- (3) 2 以上の自然数 n について, 等式

$$\sum_{k=1}^n \cos \frac{2k\pi}{n} = \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$$

が成り立つことを示せ。

2

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

- (1) t を正の実数とすると、 $|x|+|y|=t$ の表す xy 平面上の図形を図示せよ。
- (2) a を $a > 0$ を満たす実数とする。 x, y が連立不等式
- $$ax + (2-a)y \geq 2, \quad y \geq 0$$
- を満たすとき、 $|x|+|y|$ のとりうる値の最小値 m を、 a を用いた式で表せ。
- (3) a が $a > 0$ の範囲を動くとき、(2)で求めた m の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数として, $S_n = \sum_{k=n}^{n^3-1} \frac{1}{k \log k}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $\int_n^{n^3} \frac{dx}{x \log x}$ を求めよ。

(2) k を 2 以上の自然数とするとき,

$$\frac{1}{(k+1)\log(k+1)} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \log x} < \frac{1}{k \log k}$$

を示せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

a は正の無理数で, $X = a^3 + 3a^2 - 14a + 6$, $Y = a^2 - 2a$ を考えると, X と Y はともに有理数である。以下の問いに答えよ。

- (1) 整式 $x^3 + 3x^2 - 14x + 6$ を整式 $x^2 - 2x$ で割ったときの商と余りを求めよ。
- (2) X と Y の値を求めよ。
- (3) a の値を求めよ。ただし, 素数の平方根は無理数であることを用いてよい。

5

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

- (1) $x > 1$ において, $x > 2 \log x$ が成り立つことを示せ。ただし, e を自然対数の底とするとき, $2.7 < e < 2.8$ であることを用いてよい。
- (2) 自然数 n に対して, $(2n \log n)^n < e^{2n \log n}$ が成り立つことを示せ。