

1

問題のページへ

$f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$ に対して,

$$f'(x) = a - \sin x + \cos 2x = a - (2\sin^2 x + \sin x - 1)$$

ここで, $g(x) = 2\sin^2 x + \sin x - 1$ とおくと,

$$g(x) = 2\left(\sin x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$$

$-1 \leq \sin x \leq 1$ より, $-\frac{9}{8} \leq g(x) \leq 2 \dots \dots (*)$ となる。

さて, $f(x)$ が極値をもたない条件は, $f'(x)$ の符号が変化しない条件に等しく,
 $f'(x) = a - g(x)$ に注目すると, (*)から,

$$a \leq -\frac{9}{8}, \quad 2 \leq a$$

[解 説]

微分法に関する基本問題です。増減表を書くまでもありませんでした。

2

問題のページへ

(1) 条件から, ab が p の倍数より, a または b は p の倍数である。

ここで, a, b の一方が p の倍数, 他方が p の倍数でないとき, $a+b$ は p の倍数ではない。また, a, b がともに p の倍数であるとき, $a+b$ は p の倍数である。

したがって, $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数である。

(2) まず, $a+b$ と a^2+b^2 に対して,

$$2ab = (a+b)^2 - (a^2+b^2) \dots\dots\dots$$

$a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるので, より, $2ab$ は p の倍数である。

p は 3 以上の素数から, 2 と p は互いに素となるので, ab は p の倍数である。

よって, (1)の結果から, a と b はともに p の倍数である。

(3) まず, a^2+b^2 と a^3+b^3 に対して,

$$ab(a+b) = (a+b)(a^2+b^2) - (a^3+b^3) \dots\dots\dots$$

a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるので, より, $ab(a+b)$ は p の倍数である。

すると, 条件より, ab または $a+b$ が p の倍数である。

(i) ab が p の倍数であるとき

より, $(a+b)^2$ は p の倍数となり, $a+b$ は p の倍数である。

(1)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(ii) $a+b$ が p の倍数であるとき

(2)の結果より, a と b はともに p の倍数である。

(i)(ii)より, いずれの場合も, a と b はともに p の倍数である。

[解 説]

問題文に不必要と思えるほどのヒントが記されています。(3)の 式は 式を参考に作りました。なお, 文系に $p=3$ のときの類題が出ています。

3

問題のページへ

(1) $f(x) = \frac{\log x}{x}$, $g(x) = \frac{2\log x}{x^2}$ に対し, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ を連立すると,

$$\frac{\log x}{x} = \frac{2\log x}{x^2}, (x-2)\log x = 0$$

これより, $x = 1, 2$ となり, 共有点の座標は, $(1, 0)$, $(2, \frac{1}{2}\log 2)$ である。

(2) まず, $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$ より, $y = f(x)$ の増減は右

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

表のようになり, 極大値は $\frac{1}{e}$ であり,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\log x}{x} = -$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$$

また, $g'(x) = \frac{2x - 4x \log x}{x^4} = \frac{2(1 - 2\log x)}{x^3}$ より,

x	0	...	\sqrt{e}	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		↗	$\frac{1}{e}$	↘

$y = g(x)$ の増減は右表のようになり, 極大値は $\frac{1}{e}$ で

あり,

$$\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2\log x}{x^2} = - \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} \cdot \frac{\log x}{x} = 0$$

以上より, $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは右図のようになる。

(3) $1 < x < e$ において, 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$, および直線 $x = e$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_1^2 \{g(x) - f(x)\} dx + \int_2^e \{f(x) - g(x)\} dx$$

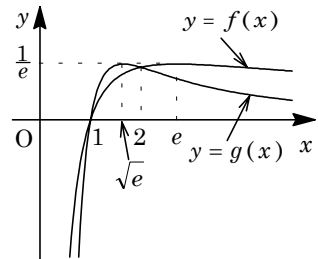
$$\text{さて, } \int f(x) dx = \int \frac{\log x}{x} dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

$$\int g(x) dx = \int \frac{2\log x}{x^2} dx = -\frac{2\log x}{x} + \int \frac{2}{x^2} dx = -\frac{2\log x + 2}{x} + C$$

$$\text{よって, } S = \left[-\frac{2\log x + 2}{x} - \frac{1}{2}(\log x)^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}(\log x)^2 + \frac{2\log x + 2}{x} \right]_2^e$$

$$= -(\log 2 + 1) - \frac{1}{2}(\log 2)^2 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{4}{e} - \frac{1}{2}(\log 2)^2 - (\log 2 + 1)$$

$$= -(\log 2)^2 - 2\log 2 + \frac{4}{e} + \frac{1}{2}$$



[解 説]

標準的な計算量の微積分の問題です。

4

問題のページへ

- (1) $n+1$ 枚のカードを取り出して並べたとき、1 回目から n 回目までは白いカードを取り出し、 $n+1$ 回目に赤いカードを取り出すと、 $X=n$ であるので、この確率 p_n は、

$$p_n = \frac{{}_N P_n \cdot {}_2 P_1}{{}_{N+2} P_{n+1}} = \frac{2N!}{(N-n)!} \cdot \frac{2(N-n+1)}{(N+2)!} = \frac{2(N-n+1)}{(N-n+1)!}$$

なお、この式は、 $n=0$ のときも成り立つ。

- (2) X の期待値を $E(X)$ とおくと、

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{2}{(N+1)(N+2)} \sum_{n=0}^N n(N-n+1) \\ &= \frac{2}{(N+1)(N+2)} \sum_{n=0}^N \{ -n^2 + (N+1)n \} \\ &= \frac{2}{(N+1)(N+2)} \left\{ -\frac{1}{6} N(N+1)(2N+1) + \frac{1}{2} N(N+1)^2 \right\} \\ &= \frac{N \{ -(2N+1) + 3(N+1) \}}{3(N+2)} = \frac{N}{3} \end{aligned}$$

- (3) $n+2$ 枚のカードを取り出して並べたとき、1 回目から $n+1$ 回目までに白いカードを n 枚、赤いカードを 1 枚取り出し、 $n+2$ 回目に赤いカードを取り出すと、 $Y=n$ であるので、この確率 q_n は、

$$q_n = \frac{{}_{n+1} C_1 \cdot {}_N P_n \cdot {}_2 P_1 \times 1}{{}_{N+2} P_{n+2}} = \frac{2(n+1)N!}{(N-n)!} \cdot \frac{2(n+1)}{(N+2)!} = \frac{2(n+1)}{(N-n)!}$$

なお、この式は、 $n=0$ のときも成り立つ。

[解 説]

確率と期待値に関する基本題です。いろいろな考え方ができますが、(3)も(1)と同じ考え方をしています。

5

問題のページへ

- (1) 座標平面上の点は、行列 $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ で表される 1 次変換によって、原点まわりに θ だけ回転し、さらに原点との距離を $\frac{1}{2}$ 倍にする点に移されるので、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta & -\sin(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta & \cos(n-1)\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cos(n-1)\theta$ 、 $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin(n-1)\theta$

- (2) (1)より、 $a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos n\theta$ 、 $b_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin n\theta$

2点 $P_n(a_n, b_n)$ 、 $P_{n+1}(a_{n+1}, b_{n+1})$ を結ぶ線分の長さ l_n は、

$$\begin{aligned} l_n^2 &= (a_{n+1} - a_n)^2 + (b_{n+1} - b_n)^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \{ \cos n\theta - 2\cos(n-1)\theta \}^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \{ \sin n\theta - 2\sin(n-1)\theta \}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \{ 1 + 4 - 4\cos n\theta \cos(n-1)\theta - 4\sin n\theta \sin(n-1)\theta \} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} (5 - 4\cos \theta) \end{aligned}$$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、 $l_n^2 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ となり、 $l_n = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

- (3) 数列 $\{l_n\}$ は、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列なので、

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

[解 説]

回転・拡大という相似変換を題材にした問題です。この場合について、行列の n 乗に関しては、この程度の記述でよいでしょう。