

1

解答解説のページへ

a を実数とする。関数 $f(x) = ax + \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$ が極値をもたないように、 a の値の範囲を定めよ。

2

解答解説のページへ

p を 3 以上の素数, a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。ただし, 自然数 m, n に対し, mn が p の倍数ならば, m または n は p の倍数であることを用いてよい。

- (1) $a+b$ と ab がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。
- (2) $a+b$ と a^2+b^2 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。
- (3) a^2+b^2 と a^3+b^3 がともに p の倍数であるとき, a と b はともに p の倍数であることを示せ。

3

解答解説のページへ

$f(x) = \frac{\log x}{x}$, $g(x) = \frac{2\log x}{x^2}$ ($x > 0$) とする。以下の問いに答えよ。ただし、自

然対数の底 e について、 $e = 2.718\dots$ であること、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であることを証明なし

で用いてよい。

- (1) 2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の共有点の座標をすべて求めよ。
- (2) 区間 $x > 0$ において、関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の増減、極値を調べ、2 曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ のグラフの概形をかけ。グラフの変曲点は求めなくてよい。
- (3) 区間 $1 < x < e$ において、2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$, および直線 $x = e$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

4

解答解説のページへ

N を自然数とする。赤いカード 2 枚と白いカード N 枚が入っている袋から無作為にカードを 1 枚ずつ取り出して並べていくゲームをする。2 枚目の赤いカードが取り出された時点でゲームは終了する。赤いカードが最初に取り出されるまでに取り出された白いカードの枚数を X とし、ゲーム終了時までに取り出された白いカードの総数を Y とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して、 $X = n$ となる確率 p_n を求めよ。
- (2) X の期待値を求めよ。
- (3) $n = 0, 1, \dots, N$ に対して、 $Y = n$ となる確率 q_n を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面において、点 $P_n(a_n, b_n)$ ($n = 1$) を

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n = 2)$$

で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) a_n, b_n を n と θ を用いて表せ。
- (2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき、自然数 n に対して、線分 P_nP_{n+1} の長さ l_n を求めよ。
- (3) (2) で求めた l_n に対して、 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$ を求めよ。