

1

問題のページへ

(1) $f(x) = \log(ax + b(1-x)) - x \log a - (1-x) \log b$ に対して,

$$f'(x) = \frac{a-b}{ax+b(1-x)} - \log a + \log b, \quad f'(x) = -\frac{(a-b)^2}{\{ax+b(1-x)\}^2}$$

$a > b > 0$ から, $0 < x < 1$ において $f''(x) < 0$ となる。

(2) まず, $t > 0$ のとき, $g(t) = t - 1 - \log t$ とおくと,

$$g'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

すると, $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	...	1	...
$g'(t)$		-	0	+
$g(t)$		↘	0	↗

さて, (1)より, $f'(0) = \frac{a-b}{b} - \log a + \log b = \frac{a}{b} - 1 - \log \frac{a}{b} = g\left(\frac{a}{b}\right)$

$$f'(1) = \frac{a-b}{a} - \log a + \log b = 1 - \frac{b}{a} + \log \frac{b}{a} = -g\left(\frac{b}{a}\right)$$

ここで, $a > b > 0$ から, $\frac{a}{b} > 1$, $0 < \frac{b}{a} < 1$ から, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$

さらに, (1)から, $0 < x < 1$ で $f'(x)$ は単調減少であるので, $f'(c) = 0$ を満たす実数 c は, $0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在することになる。

(3) (2)より, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

また, $f(0) = f(1) = 0$ から, $0 < x < 1$ において, $f(x) > 0$ となり,

$$\log(ax + b(1-x)) - x \log a + (1-x) \log b$$

$$\log(ax + b(1-x)) - \log a^x b^{1-x}$$

よって, $ax + b(1-x) = a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

x	0	...	c	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		↗		↘	

[解 説]

曲線 $y = \log x$ が上に凸であることを題材としています。(2)で, 平均値の定理を直接的に利用しないときは, 上のような解になります。

2

問題のページへ

(1) $f(x) = x^3 - 3x + 1$ に対して,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

すると, $-2 < x < 2$ における

$f(x)$ の増減は右表のようになり, 方程式 $f(x) = 0$ の実数解は, $-2 < x < -1$, $-1 < x < 1$, $1 < x < 2$ に 1 つずつある。

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-1	↗	3	↘	-1	↗	3

すなわち, $f(x) = 0$ は, 絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。(2) α は $f(x) = 0$ の解なので, $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$ から, $\alpha^3 = 3\alpha - 1 \dots\dots (*)$ また, $g(x) = x^2 - 2$ から, $g(\alpha) = \alpha^2 - 2$ となり, $(*)$ より,

$$\begin{aligned} f(g(\alpha)) &= f(\alpha^2 - 2) = (\alpha^2 - 2)^3 - 3(\alpha^2 - 2) + 1 = \alpha^6 - 6\alpha^4 + 9\alpha^2 - 1 \\ &= (3\alpha - 1)^2 - 6\alpha(3\alpha - 1) + 9\alpha^2 - 1 \\ &= 9\alpha^2 - 6\alpha + 1 - 18\alpha^2 + 6\alpha + 9\alpha^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

よって, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解である。(3) $f(-\sqrt{3}) = f(0) = f(\sqrt{3}) = 1$ より, $f(x) = 0$ の解を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$) としたとき,

$$-2 < \alpha_1 < -\sqrt{3}, \quad 0 < \alpha_2 < 1, \quad 1 < \alpha_3 < \sqrt{3}$$

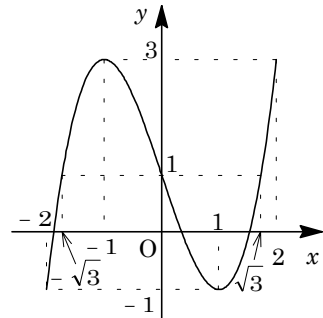
すると, $g(x) = x^2 - 2$ より,

$$1 < g(\alpha_1) < 2, \quad -2 < g(\alpha_2) < -1, \quad -1 < g(\alpha_3) < 1$$

よって, $g(\alpha_2) < g(\alpha_3) < g(\alpha_1)$ となる。

また, (2) から, $g(\alpha_1), g(\alpha_2), g(\alpha_3)$ も $f(x) = 0$ の解であることより,

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = \{g(\alpha_1), g(\alpha_2), g(\alpha_3)\}$$

以上より, $g(\alpha_1) = \alpha_3, g(\alpha_2) = \alpha_1, g(\alpha_3) = \alpha_2$ である。

[解 説]

グラフの概形から考えると, (3)での $x = \pm\sqrt{3}$ を用いた解のとりうる範囲の評価は, 難しくはないでしょう。なお, 記憶をたどって調べたところ, 1997年に早大・理工で本問と同じ問題が出ています。

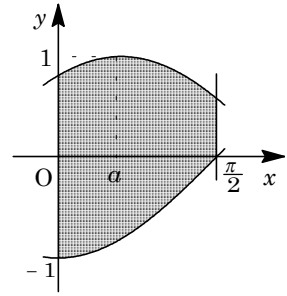
3

問題のページへ

- (1) 2 直線 $x = 0$ と $x = \frac{\pi}{2}$, 2 曲線 $y = \cos(x - a)$ と $y = -\cos x$

によって囲まれる図形 G の面積 S は,

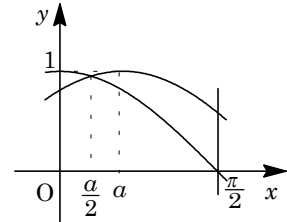
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{ \cos(x - a) + \cos x \} dx \\ &= [\sin(x - a) + \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \sin(-a) + 1 = \cos a + \sin a + 1 \end{aligned}$$



- (2) (1)から, $S = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

そこで, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ のとき $\frac{\pi}{4} < a + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$ から, $a + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ すなわち $a = \frac{\pi}{4}$ のとき, S は最大値 $\sqrt{2} + 1$ をとる。

- (3) まず, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, 曲線 $y = -\cos x$ を x 軸に関して折り返し, x 軸の上側に対称移動すると, 曲線 $y = \cos x$ となる。そして, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ のとき, 2 曲線 $y = \cos(x - a)$, $y = \cos x$ の交点は,



$$\cos(x - a) = \cos x, \quad x - a = -x, \quad x = \frac{a}{2}$$

図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体は, $0 < x < \frac{a}{2}$ では $y = \cos x$, $\frac{a}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ では $y = \cos(x - a)$ を 1 回転させたものに等しく, その体積 V は,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{a}{2}} \cos^2 x dx + \pi \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x - a) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{a}{2}} (1 + \cos 2x) dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \{1 + \cos 2(x - a)\} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{a}{2}} dx + \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{a}{2}} \cos 2x dx + \frac{\pi}{2} \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2(x - a) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{a}{2}} + \frac{\pi}{2} \left[\frac{\sin 2(x - a)}{2} \right]_{\frac{a}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{4} \sin a + \frac{\pi}{4} \sin(\pi - 2a) - \frac{\pi}{4} \sin(-a) = \frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi}{2} \sin a + \frac{\pi}{4} \sin 2a \end{aligned}$$

なお, この式は $a = 0$ のときも成立する。

[解 説]

(3)でも利用したように, 回転体の体積を求めるとき, 回転軸の一方の側に曲線に対称移動してまとめると, ミスが少なくなります。

4

問題のページへ

(1) 得点 X_3 の表は左側, X_4 の表は右側のようになる。

$B \backslash A$	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

$B \backslash A$	1	2	3	4	5	6
1	$a+b$	2	3	4	5	6
2	1	$2a+b$	3	4	5	6
3	1	2	$3a+b$	4	5	6
4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6

(2) X_3 の表と X_4 の表は, $A=3$ の行のみ値が異なっていることより,

$$E_4 - E_3 = \frac{1}{36}(1+2+3a+b+4+5+6) - \frac{1}{36}(3 \times 6) = \frac{3a+b}{36} \dots\dots\dots$$

(3) (2)と同様に, X_2 の表と X_3 の表は, $A=2$ の行のみ値が異なっていることより,

$$E_3 - E_2 = \frac{1}{36}(1+2a+b+3+4+5+6) - \frac{1}{36}(2 \times 6) = \frac{2a+b+7}{36} \dots\dots\dots$$

X_1 の表と X_2 の表は, $A=1$ の行のみ値が異なっていることより,

$$E_2 - E_1 = \frac{1}{36}(a+b+2+3+4+5+6) - \frac{1}{36}(1 \times 6) = \frac{a+b+14}{36} \dots\dots\dots$$

また, X_4 の表と X_5 の表は, $A=4$ の行のみ値が異なっていることより,

$$E_5 - E_4 = \frac{1}{36}(1+2+3+4a+b+5+6) - \frac{1}{36}(4 \times 6) = \frac{4a+b-7}{36} \dots\dots\dots$$

X_5 の表と X_6 の表は, $A=5$ の行のみ値が異なっていることより,

$$E_6 - E_5 = \frac{1}{36}(1+2+3+4+5a+b+6) - \frac{1}{36}(5 \times 6) = \frac{5a+b-14}{36} \dots\dots\dots$$

ここで, 条件より, $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E_6$ より,

$$E_2 - E_1 = 0, \quad E_3 - E_2 = 0, \quad E_4 - E_3 = 0, \quad E_5 - E_4 = 0, \quad E_6 - E_5 = 0$$

$$\sim \text{より, } 3a+b=0 \dots\dots, \quad 2a+b+7=0 \dots\dots$$

$$a+b+14=0 \dots\dots, \quad 4a+b-7=0 \dots\dots, \quad 5a+b-14=0 \dots\dots$$

より, $a=7, b=-21$ となり, この値は をすべて満たす。

よって, $E_1 = E_2 = \dots = E_6$ となる a, b は存在し, $a=7, b=-21$ である。

[解 説]

(3)での a, b の値は, $E_4 - E_3$ と $E_3 - E_2$ だけから求まります。その後, 十分性を確認する方法もありますが, 残りが 3 の場合しかないので, これらを調べるという直接的な方法を採用しました。

5

問題のページへ

(1) $t > 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ ($n \geq 1$) であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1, 2$ のとき

条件より, $a_1 = 1, a_2 = 2t > 2$ なので, $0 < a_1 < a_2$ が成り立つ。

(ii) $n = k, k+1$ のとき

$0 < a_k < a_{k+1}$ の成立を仮定すると, 条件より,

$$a_{k+2} - a_{k+1} = (2t-1)a_{k+1} - a_k > a_{k+1} - a_k > 0$$

よって, $0 < a_{k+1} < a_{k+2}$ が成り立つ。

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $t > 1$ のとき, $0 < a_n < a_{n+1}$ が成り立つ。

(2) $t < -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ ($n \geq 1$) であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1, 2$ のとき

条件より, $|a_1| = 1, |a_2| = 2|t| > 2$ なので, $0 < |a_1| < |a_2|$ が成り立つ。

(ii) $n = k, k+1$ のとき

$0 < |a_k| < |a_{k+1}|$ の成立を仮定すると, 条件より,

$$|a_{k+2}| = |2ta_{k+1} - a_k| = |2ta_{k+1}| - |a_k| = 2|t||a_{k+1}| - |a_k|$$

すると, $|a_{k+2}| - |a_{k+1}| = (2|t|-1)|a_{k+1}| - |a_k| > |a_{k+1}| - |a_k| > 0$

よって, $0 < |a_{k+1}| < |a_{k+2}|$ が成り立つ。

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $t < -1$ のとき, $0 < |a_n| < |a_{n+1}|$ が成り立つ。

(3) $-1 < t < 1$ のとき, $t = \cos \theta$ となる θ を用いて, $a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ ($n \geq 1$) であることを

数学的帰納法で証明する。

(i) $n = 1, 2$ のとき

$a_1 = 1 = \frac{\sin \theta}{\sin \theta}, a_2 = 2t = 2 \cos \theta = \frac{\sin 2\theta}{\sin \theta}$ となり, 成立する。

(ii) $n = k, k+1$ のとき

$a_k = \frac{\sin k\theta}{\sin \theta}, a_{k+1} = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta}$ であると仮定すると, 条件より,

$$\begin{aligned} a_{k+2} &= 2t \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin(k+1)\theta \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin(k+2)\theta + \sin k\theta}{\sin \theta} - \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(k+2)\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

(i)(ii)より, 自然数 n に対し, $-1 < t < 1$ ($t = \cos \theta$) のとき, $a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$ が成り立つ。

[解 説]

3 題とも数学的帰納法でクリアーに示せます。なお, (1)を参考にして(2)では三角不等式を用いましたが, 漸化式では, 1999年に東大・理で利用して以来, 久々です。