

1

解答解説のページへ

a, b は実数で $a > b > 0$ とする。区間 $0 < x < 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = \log(ax + b(1-x)) - x \log a - (1-x) \log b$$

ただし, \log は自然対数を表す。このとき, 以下のことを示せ。

- (1) $0 < x < 1$ に対して $f''(x) < 0$ が成り立つ。
- (2) $f'(c) = 0$ を満たす実数 c が, $0 < c < 1$ の範囲にただ 1 つ存在する。
- (3) $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対して, $ax + b(1-x) = a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

2

解答解説のページへ

$f(x) = x^3 - 3x + 1$, $g(x) = x^2 - 2$ とし, 方程式 $f(x) = 0$ について考える。このとき, 以下のことを示せ。

- (1) $f(x) = 0$ は絶対値が 2 より小さい 3 つの相異なる実数解をもつ。
- (2) α が $f(x) = 0$ の解ならば, $g(\alpha)$ も $f(x) = 0$ の解となる。
- (3) $f(x) = 0$ の解を小さい順に $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ とすれば,

$$g(\alpha_1) = \alpha_3, \quad g(\alpha_2) = \alpha_1, \quad g(\alpha_3) = \alpha_2$$

となる。

3

解答解説のページへ

a を $0 < a < \frac{\pi}{2}$ の範囲にある実数とする。2 つの直線 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ および 2 つの曲線 $y = \cos(x-a)$, $y = -\cos x$ によって囲まれる図形を G とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 図形 G の面積を S とする。 S を a を用いた式で表せ。
- (2) a が $0 < a < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 S を最大にするような a の値と、そのときの S の値を求めよ。
- (3) 図形 G を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。 V を a を用いた式で表せ。

4

解答解説のページへ

大小 2 つのサイコロを同時に 1 回投げて、大きいサイコロの出た目の数 A 、および小さいサイコロの出た目の数 B に応じて得点を競うゲームを考える。ただし、このゲームには 6 種類の得点 X_n ($1 \leq n \leq 6$) があって、それぞれ、次の規則で定められているとする。

$$X_n = \begin{cases} A & (A \geq n \text{ のとき}) \\ B & (A < n \text{ かつ } A \neq B \text{ のとき}) \\ aA + b & (A < n \text{ かつ } A = B \text{ のとき}) \end{cases}$$

ここで、 a, b は実数の定数である。また、得点 X_n の期待値を E_n とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) A, B のとり得る値に対する得点 X_3 および X_4 の値を、答案用紙の表にそれぞれ記入せよ。
- (2) $E_4 - E_3$ を求めよ。
- (3) $E_1 = E_2 = \dots = E_6$ となるような a, b はあるか。あれば求めよ。なければ、そのことを示せ。

5

解答解説のページへ

t を実数として, 数列 a_1, a_2, \dots を

$$a_1 = 1, a_2 = 2t, a_{n+1} = 2ta_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) $t = 1$ ならば, $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ となることを示せ。
- (2) $t = -1$ ならば, $0 < |a_1| < |a_2| < |a_3| < \dots$ となることを示せ。
- (3) $-1 < t < 1$ ならば, $t = \cos \theta$ となる θ を用いて,

$$a_n = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \quad (n \geq 1)$$

となることを示せ。