1

問題のページへ

(1)　命題は真である。以下，証明する。

　　$x>0$ かつ $xy>0$ より，$xy\cdot\dfrac{1}{x}>0\cdot\dfrac{1}{x}$ となる。すなわち, $y>0$ である。

(2)　命題は偽である。

　　反例： $x=0$ ， $y=-1$

(3)　命題は真である。以下，証明する。

　　$x+y\geqq 0$ かつ $xy\geqq 0$ のとき, $y<0$ と仮定する。

　　すると，$xy\geqq 0$ かつ $y<0$ から, $x\leqq 0$ となり,

$$x+y<0$$

　　これは，$x+y\geqq 0$ と矛盾する。

　　よって，$x+y\geqq 0$ かつ $xy\geqq 0$ ならば, $y\geqq 0$ である。

[解 説]

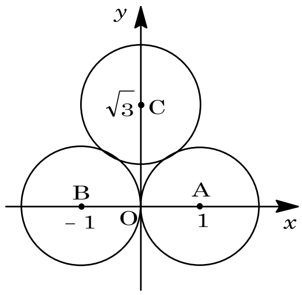
上記のように，式を変形することによって証明する以外に，真理集合を図示して判断するという手もあります。

2

問題のページへ

(1)　A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$を中心とする半径 r の 2 つの円が接するのは，外接する場合のみなので，

$$2r=2,\ \ r=1$$



(2)　C$(0,\ \sqrt{3})$に対し，AC$=2$ より，C を中心とする半径 1 の円は，A を中心とする半径 1 の円に接する。

　同様に，BC$=2$ より，C を中心とする半径 1 の円は，B を中心とする半径 1 の円に接する。

(3)　3 点 A, B, C を中心とする半径 s の 3 つの円を，それぞれ円 A, B, C とする。

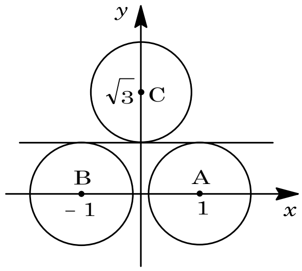
　さて，(2)より，$s=1$ のとき，3 円 A, B, C は互いに外接し，3 円に接する接線は存在しない。また，$s>1$ のときは，3 円 A, B, C は互いに交わり，3 円に接する接線は存在しない。また，これより，3 円に接する直線 l は，$s<1$ のときに存在する。

(i)　2 円 A, B の共通外接線に円 C が接するとき

　2 円 A, B の共通外接線は x 軸に平行になり，$l: y=s$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\sqrt{3}-s=s,\ \ s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l: y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。



(ii)　2 円 A, B の共通内接線に円 C が接するとき

まず，2 円 A, B の共通内接線は原点を通る。

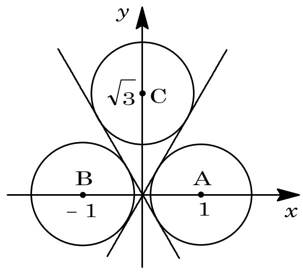
ここで，x 軸の正の部分とのなす角を θ とすると，

$$\sin\theta=s,\ \ \tan\theta=\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

直線 l は $y=\pm\dfrac{s}{\sqrt{1-s^2}}x$ すなわち $\pm sx-\sqrt{1-s^2}\,y=0$ とおくことができ，直線 l と円 C が接することより，

$$\frac{\left|-\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{3}\right|}{\sqrt{s^2+1-s^2}}=s,\ \ 3(1-s^2)=s^2,\ \ s=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると，$l: y=\pm\sqrt{3}x$ である。



[解 説]

(3)では，共通接線 l が 3 本存在しますが，対称性を考えると明らかでしょう。

3

問題のページへ

(1)　まず，$S=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$である。

さて, k を 0 以上の整数として, n を 4 で割った余りで分類する。

(i)　n を 4 で割った余りが 0 のとき　$n=4k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+4)(4k+5)=2(k+1)(4k+5)$$

(ii)　n を 4 で割った余りが 3 のとき　$n=4k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+3)(4k+4)=2(k+1)(4k+3)$$

(i)(ii)より, S は偶数である。

(2)　(iii)　n を 4 で割った余りが 1 のとき　$n=4k+1$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+1)(4k+2)=(4k+1)(2k+1)$$

(iv)　n を 4 で割った余りが 2 のとき　$n=4k+2$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+2)(4k+3)=(2k+1)(4k+3)$$

(iii)(iv)より, S はいずれも奇数である。

よって, (1)と合わせ, S が偶数ならば, n を 4 で割った余りは 0 または 3 である。

(3)　S が 4 の倍数ならば, (2)より, n を 4 で割った余りは 0 または 3 となるので, n を 8 で割った余りは 0, 3, 4, 7 のいずれかである。

(i)　n を 8 で割った余りが 0 のとき　$n=8k+8$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+8)(8k+9)=4(k+1)(8k+9)$$

(ii)　n を 8 で割った余りが 3 のとき　$n=8k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+3)(8k+4)=2(8k+3)(2k+1)$$

$(8k+3)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(iii)　n を 8 で割った余りが 4 のとき　$n=8k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+4)(8k+5)=2(8k+5)(2k+1)$$

$(8k+5)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(iv)　n を 8 で割った余りが 7 のとき　$n=8k+7$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+7)(8k+8)=4(k+1)(8k+7)$$

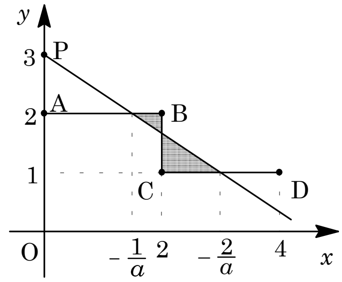
(i)～(iv)より, S が 4 の倍数ならば, n を 8 で割った余りが 0 または 7 である。

[解 説]

余りで整数を分類するタイプの証明問題です。(2)は，(1)の逆の証明ですが，転換法を意識して記述しています。(3)は(2)が誘導です。

4

問題のページへ



(1)　直線 PB の傾きは$-\dfrac{1}{2}$，PC の傾きは-1より，直線 $l : y = ax + 3$ が，線分 BC と交わる条件は，

$$-1 < a < -\frac{1}{2}$$

(2)　l と AB の交点は，$2 = ax + 3$ より，$x = -\dfrac{1}{a}$

l と CD の交点は，$1 = ax + 3$ より，$x = -\dfrac{2}{a}$

さて, l と AB, BC で囲まれる図形の, x 軸のまわりの回転体の体積 V_1 は,

$$V_1 = \pi\int_{-\frac{1}{a}}^{2}\{2^2 - (ax+3)^2\}dx = \pi\int_{-\frac{1}{a}}^{2}(-a^2x^2 - 6ax - 5)\,dx$$

$$= -\pi\left[\frac{a^2}{3}x^3 + 3ax^2 + 5x\right]_{-\frac{1}{a}}^{2} = -\frac{a^2}{3}\pi\left(8 + \frac{1}{a^3}\right) - 3a\pi\left(4 - \frac{1}{a^2}\right) - 5\pi\left(2 + \frac{1}{a}\right)$$

$$= -\pi\left(\frac{8}{3}a^2 + 12a + 10 + \frac{7}{3a}\right)$$

また, l と BC, CD で囲まれる図形の, x 軸のまわりの回転体の体積 V_2 は,

$$V_2 = \pi\int_{2}^{-\frac{2}{a}}\{(ax+3)^2 - 1^2\}dx = \pi\int_{2}^{-\frac{2}{a}}(a^2x^2 + 6ax + 8)\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{a^2}{3}x^3 + 3ax^2 + 8x\right]_{2}^{-\frac{2}{a}} = \frac{a^2}{3}\pi\left(-\frac{8}{a^3} - 8\right) + 3a\pi\left(\frac{4}{a^2} - 4\right) + 8\pi\left(-\frac{2}{a} - 2\right)$$

$$= -\pi\left(\frac{8}{3}a^2 + 12a + 16 + \frac{20}{3a}\right)$$

よって，$V = V_1 + V_2 = -\pi\left(\dfrac{16}{3}a^2 + 24a + 26 + \dfrac{9}{a}\right)$

(3)　(2)より，$\dfrac{dV}{da} = -\pi\left(\dfrac{32}{3}a + 24 - \dfrac{9}{a^2}\right) = -\dfrac{\pi}{3a^2}(32a^3 + 72a^2 - 27)$

$$= -\frac{\pi}{3a^2}(4a+3)(8a^2 + 12a - 9)$$

ここで，方程式 $8a^2 + 12a - 9 = 0$ の解は，$a = \dfrac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{4}$ となり，$-1 < a < -\dfrac{1}{2}$ において，

$$8a^2 + 12a - 9 < 0$$

これより，V は右表のように値が増減するので，$a = -\dfrac{3}{4}$ のとき最小値をとる。

a	-1	$\cdots$	$-\frac{3}{4}$	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$
$\frac{dV}{da}$		$-$	0	$+$	
V		↘		↗	

[解 説]

円錐台の公式を使わないときには，上記のように積分するのがベストです。なお，(3)が証明の設問になったのは，$\dfrac{dV}{da}$ が因数分解しにくいためでしょう。

5

問題のページへ

(1)　二項定理より，$(1+x)^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 x + {}_n\mathrm{C}_2 x^2 + {}_n\mathrm{C}_3 x^3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n x^n$

$x=1$を代入すると，$2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$ ………①

$x=-1$を代入すると，$0 = {}_n\mathrm{C}_0 - {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_3 + \cdots + (-1)^n {}_n\mathrm{C}_n$ ………②

(2)　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$とおくと，

$$A^2 - E = O,\quad A^2 = E$$

よって，帰納的に, kが偶数のとき$A^k = E$, kが奇数のとき$A^k = A$である。

(3)　$M_1 M_2 M_3 \cdots M_n = E$ ……③となる条件は, (2)より，M_1，M_2，M_3，…，M_nの偶数個がAであり，それ以外はEの場合に限る。

そこで，③が成立する確率をPとおくと，$1 \leqq i \leqq n$として，$M_i = A$，$M_i = E$となる確率が，それぞれ$\dfrac{1}{3}$ずつであることより，

(i)　nが偶数のとき

$$P = {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n)$$

ここで，①②より，$2^n = 2({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n)$となり，

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^{n-1}$$

よって，$P = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$となる。

(ii)　nが奇数のとき

$$P = {}_n\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1})$$

ここで，①②より，$2^n = 2({}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1})$となり，

$${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} = 2^{n-1}$$

よって，$P = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$となる。

(i)(ii)より, nの偶奇にかかわらず，$P = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$である。

[解　説]

頻出の行列の n 乗問題に，二項定理や確率が味付けされた総合問題となっています。