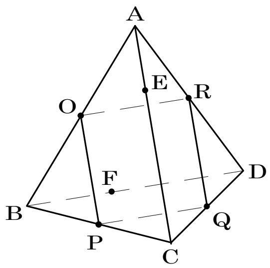
1

問題のページへ



(1)　点 O, P, Q, R は，それぞれ辺 AB, BC, CD, DA の中点なので，中点連結定理を用いると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

これより，四角形 OPQR は平行四辺形となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

(2)　線分 EF の中点を M とする。また，$0<t<1$，$0<s<1$ として，$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{BF}:\mathrm{FD}=s:1-s$ とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BD}})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{1}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}t\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}s\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

よって，点 M は 3 点 O, P, R を含む平面上にある。

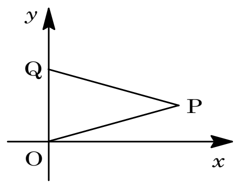
さらに，(1)より，4 点 O, P, Q, R は同一平面上にあることから，点 M は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にある。

[解 説]

(1)で求めた関係は，ベクトルの計算だけでも導けますが，上記のように，中点連結定理を利用した方が単純明快です。

2

問題のページへ



(1)　二等辺三角形の底辺を OQ，第 1 象限内の頂点を$P(x,\ y)$とする。ただし，$x>0$，$y>0$ である。

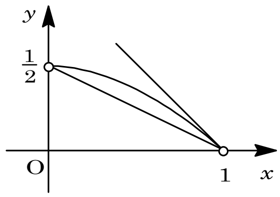
条件より，$\triangle OPQ$ の周の長さが 2 なので，

$$2\sqrt{x^2+y^2}+2y=2,\quad \sqrt{x^2+y^2}=1-y$$

$y\leqq 1$ のもとで，両辺を 2 乗すると，$x^2+y^2=(1-y)^2$

まとめると，点 P の軌跡の方程式は，

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$



(2)　まず，$y=a(x-1)\cdots\cdots$②は，点$(1,\ 0)$を通り，傾きが a の直線を表す。

さて，①より $y'=-x$ となり，$x=1$ のとき $y'=-1$ である。すなわち，点$(1,\ 0)$における接線の傾きは-1となる。

また，②が点$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$を通るとき，$a=-\frac{1}{2}$である。

したがって，①と②が第 1 象限内で交点をもつような a の範囲は，図より，

$$-1<a<-\frac{1}{2}$$

[解 説]

(2)の別解として，①と②の $x\neq 1$ の交点を求め，それが 0 より大，1 より小という不等式を立てるという方法もあります。

3

問題のページへ

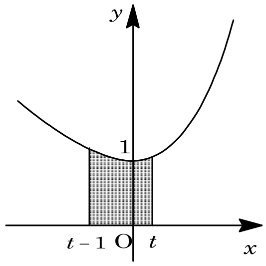
(1)　$f(x)=e^x-x$ に対して，$f'(x)=e^x-1$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$f(x)\geqq 1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

(2)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=t$，$x=t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は，



$$S(t)=\int_{t-1}^{t}(e^x-x)dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_{t-1}^{t}$$

$$=e^t-e^{t-1}-\frac{1}{2}\{t^2-(t-1)^2\}$$

$$=(e-1)e^{t-1}-t+\frac{1}{2}$$

(3)　(2)より，$S'(t)=(e-1)e^{t-1}-1$

これより，$S'(t)=0$ の解は，

$$e^{t-1}=\frac{1}{e-1},\quad t=1+\log\frac{1}{e-1}=\log\frac{e}{e-1}$$

すると，$S(t)$ の増減は右表のようになり，

t	$\cdots$	$\log\frac{e}{e-1}$	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

$t=\log\dfrac{e}{e-1}$ のとき最小値をとる。その値は,

$$S\left(\log\frac{e}{e-1}\right)=(e-1)\cdot\frac{1}{e-1}-1-\log\frac{1}{e-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\log(e-1)$$

[解 説]

微積分の応用に関する基本題です。複雑な計算も要求されていません。

4

問題のページへ

(1)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x = \sin t$，$y = \sin 2t$ に対して, $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ となり,

$$y = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$$

(2)　(1)より，$y' = 2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2x\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

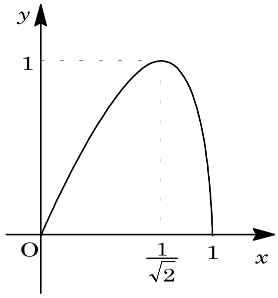
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	2	＋	0	－	×
y	0	↗	1	↘	0

よって, 曲線 C の概形は右下図のようになる。

そこで, x 軸と C で囲まれる図形 D の面積 S は, $u = 1-x^2$ とおくと,

$$S = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_1^0 \sqrt{u}\,(-du)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



(3)　D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V は, $x = \sin t$ とおくと,

$$V = \int_0^1 2\pi x\cdot 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

[解 説]

(1)を誘導として, (2)の面積, (3)の体積を計算しています。(1)の設問がなければ, パラメータ表示のまま, S と V を計算していたことでしょう。なお, y 軸回転体の体積は, いわゆる円筒分割を利用しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) 1, 2, 3 から重複を許して 3 つ選んだとき，その和が 3 の倍数となる組合せは,

$\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$，$\{3,\ 3,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

(2) 9 枚のカードから 3 枚を選ぶ ${}_9\mathrm{C}_3=84$ 通りが同様に確からしいとする。

さて，カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる場合は, (1)から,

(i) $\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$，$\{3,\ 3,\ 3\}$のとき

それぞれ 1 通りずつで，合わせて 3 通りである。

(ii) $\{1,\ 2,\ 3\}$のとき

この場合は，${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=27$ 通りとなる。

(i)(ii)より，$3+27=30$ 通りとなり，求める確率は，$\dfrac{30}{84}=\dfrac{5}{14}$ である。

[解 説]

何か裏があるのではないかと疑ってしまうほどの問題です。