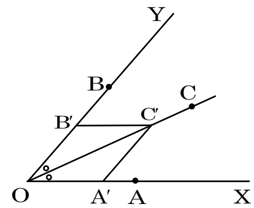
1

問題のページへ



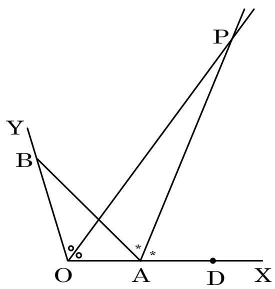
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$は，それぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$と同じ向きの単位ベクトルである。

これから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$とすると，線分$\mathrm{OC'}$は$\mathrm{OA'}$，$\mathrm{OB'}$を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線となる。

よって，tを実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}})$である点 C は，$\angle\mathrm{XOY}$の二等分線上にある。

(2)　点 P は$\angle\mathrm{XOY}$の二等分線上にあるので, (1)より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\cdots\cdots\cdots①$$



また，点 P は$\angle\mathrm{XAY}$の二等分線上にあるので，OD の中点を A として，点 D を定義すると，sを実数として，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}\right)$$

$$=\vec{a}+s\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}-\vec{a}}{|\vec{b}-\vec{a}|}\right)=\left\{1+s\left(\frac{1}{|\vec{a}|}-\frac{1}{|\vec{b}-\vec{a}|}\right)\right\}\vec{a}+\frac{s}{|\vec{b}-\vec{a}|}\vec{b}\cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は 1 次独立なので，①②より，

$$\frac{t}{|\vec{a}|}=1+s\left(\frac{1}{|\vec{a}|}-\frac{1}{|\vec{b}-\vec{a}|}\right)\cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{t}{|\vec{b}|}=\frac{s}{|\vec{b}-\vec{a}|}\cdots\cdots\cdots④$$

④より$s=\dfrac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{b}|}t$となり，③に代入して，

$$\frac{t}{|\vec{a}|}=1+\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{b}|}\left(\frac{1}{|\vec{a}|}-\frac{1}{|\vec{b}-\vec{a}|}\right)t,\quad \left(\frac{1}{|\vec{a}|}+\frac{1}{|\vec{b}|}-\frac{|\vec{b}-\vec{a}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)t=1$$

よって，$t=\dfrac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{b}-\vec{a}|}$となり，①から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{b}-\vec{a}|}\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=\frac{1}{|\vec{a}|+|\vec{b}|-|\vec{b}-\vec{a}|}(|\vec{b}|\vec{a}+|\vec{a}|\vec{b})$$

［解 説］

角の二等分線をひし形の対角線として表現する有名問題です。なお，(2)では傍心のベクトル表示を求めています。この具体例が，文系で出題されています。

© 電送数学舎 2006

2

問題のページへ

(1)　$XA=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x+\sqrt{3}y & -\sqrt{3}x+y \\ z+\sqrt{3}w & -\sqrt{3}z+w \end{pmatrix}$

$AX=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} x-\sqrt{3}z & y-\sqrt{3}w \\ \sqrt{3}x+z & \sqrt{3}y+w \end{pmatrix}$

条件より，$XA=AX$ なので，

$x+\sqrt{3}y=x-\sqrt{3}z$ ………①，$-\sqrt{3}x+y=y-\sqrt{3}w$ ………②

$z+\sqrt{3}w=\sqrt{3}x+z$ ………③，$-\sqrt{3}z+w=\sqrt{3}y+w$ ………④

①より $y=-z$，②より $x=w$ となり，このとき③④は満たされている。

以上より，$w=x$，$z=-y$

(2)　$X^2=A$ のとき，$XA=X\cdot X^2=X^3$，$AX=X^2\cdot X=X^3$ なので，

$XA=AX$

(3)　$X^2=A$ のとき, (2)より $XA=AX$ となる。

すると, (1)から $w=x$，$z=-y$ であり，

$X^2=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-y^2 & 2xy \\ -2xy & -y^2+x^2 \end{pmatrix}$

そこで，$X^2=A$ から，

$x^2-y^2=\dfrac{1}{2}$ ………⑤，$2xy=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ………⑥

⑥より $y=\dfrac{-\sqrt{3}}{4x}$ となり，⑤に代入して $x^2-\dfrac{3}{16x^2}=\dfrac{1}{2}$

$16x^4-8x^2-3=0$，$(4x^2+1)(4x^2-3)=0$

x は実数より $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，⑥から $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)=\mp\dfrac{1}{2}$（複号同順）となり，

$X=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$，$\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

[解 説]

成分の連立方程式を立て，それを解く問題ですが，(1)と(2)の誘導の結果，(3)の計算量はかなり減少しています。

© 電送数学舎 2006

3

問題のページへ

(1)　放物線$C : y = x^2$に対して，$\mathrm{A}(a,\ a^2)$における接線は，$y' = 2x$より，

$$y - a^2 = 2a(x - a),\quad y = 2ax - a^2$$

点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通るので，$q = 2ap - a^2$，$a^2 - 2pa + q = 0$ ………①

同様に，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$における接線が点$\mathrm{P}(p,\ q)$を通るので，

$$b^2 - 2pb + q = 0 \text{ ………②}$$

①②より, a, b は, t についての 2 次方程式$t^2 - 2pt + q = 0$の 2 つの解となり，

$$a + b = 2p,\quad ab = q$$

(2)　P を通る傾き m の直線 ST の方程式は,

$$y - q = m(x - p),\quad y = mx - mp + q \text{ ………③}$$

放物線$y = x^2$との交点は，$x^2 = mx - mp + q$，$x^2 - mx + mp - q = 0$

この方程式の解が，$x = s,\ t$なので，$s + t = m$，$st = mp - q$ ………④

(3)　まず, x, y の 1 次方程式$y - 2px + q = 0$を考えると，この式は直線を表し，しかも①から$\mathrm{A}(a,\ a^2)$を通り，②から$\mathrm{B}(b,\ b^2)$を通る。

すなわち，直線 AB の方程式は，$y - 2px + q = 0$ ……⑤である。

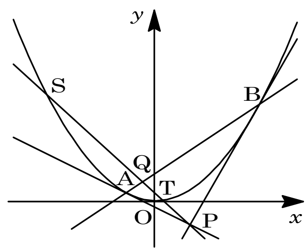
すると，直線③と⑤の交点 Q は，$mx - mp + q - 2px + q = 0$

$$(m - 2p)x = mp - 2q$$

ここで，④を用いて，$s < t < p$に注意すると，

$$m - 2p = s + t - 2p = (s - p) + (t - p) < 0$$

よって，$x = \dfrac{mp - 2q}{m - 2p}$となり，$u = \dfrac{mp - 2q}{m - 2p}$ ………⑥



さて，④⑥より，

$$(p - s + p - t)(p - u) = (2p - m)\left(p - \frac{mp - 2q}{m - 2p}\right)$$

$$= (2p - m)p + mp - 2q = 2p^2 - 2q$$

$$2(p - s)(p - t) = 2\{p^2 - (s + t)p + st\} = 2(p^2 - mp + mp - q) = 2p^2 - 2q$$

以上より，$(p - s + p - t)(p - u) = 2(p - s)(p - t)$ ………⑦

そこで，⑦の両辺を$1 + m^2$倍すると，

$$(\mathrm{PS} + \mathrm{PT})\mathrm{PQ} = 2\mathrm{PS}\cdot\mathrm{PT},\quad \frac{\mathrm{PS} + \mathrm{PT}}{\mathrm{PS}\cdot\mathrm{PT}} = \frac{2}{\mathrm{PQ}}$$

すなわち，$\dfrac{1}{\mathrm{PS}} + \dfrac{1}{\mathrm{PT}} = \dfrac{2}{\mathrm{PQ}}$が成立する。

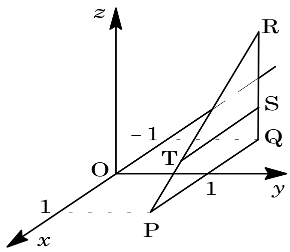
[解　説]

有名な極線と調和点列の問題ですが，文字がたくさん出て，道に迷いそうです。

© 電送数学舎 2006

4

問題のページへ



(1)　P(1, 1, 0)，Q(−1, 1, 0)，R(−1, 1, 2) のとき，

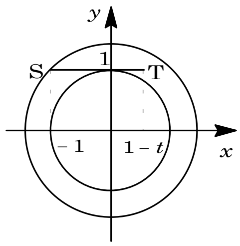
まず線分 QR は xy 平面に垂直なので，平面 $z=t$ との交点 S の座標は，S(−1, 1, t) である。

また，線分 PR と平面 $z=t$ との交点 T は，線分 PR を $t:2-t$ に内分する点より，

$$\mathrm{T}\left(\frac{-t+2-t}{t+(2-t)},\ \frac{t+2-t}{t+(2-t)},\ t\right)=(1-t,\ 1,\ t)$$

(2)　点 T の x 座標の符号で場合分けをする。

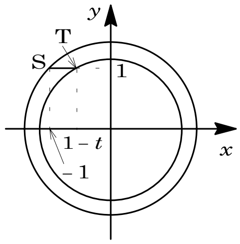
(i)　$1-t\geqq 0$ $(0\leqq t\leqq 1)$ のとき



線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が 1 であるので，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\cdot 1^2=\pi$$

(ii)　$1-t\leqq 0$ $(1\leqq t\leqq 2)$ のとき



線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は，外径が $\sqrt{2}$，内径が $\sqrt{(1-t)^2+1^2}$ であるので，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\pi(\sqrt{2})^2-\pi\left(\sqrt{(1-t)^2+1^2}\right)^2=\pi(2t-t^2)$$

(i)(ii)より，△PQR の z 軸まわりの回転体の体積 V は，

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\pi\int_0^1 dt+\pi\int_1^2(2t-t^2)\,dt=\pi+\pi\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_1^2=\frac{5}{3}\pi$$

[解 説]

平面図形の回転体の体積を求める頻出題です。回転軸に垂直な回転体の切り口がドーナツ形であることがわかれば，積分計算は難しくありません。

© 電送数学舎 2006

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1) 実数係数の 2 次方程式の 1 つの解が$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$であるとき，もう 1 つの解は$\overline{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$であるので，

$$\alpha+\overline{\alpha}=3,\quad \alpha\overline{\alpha}=\frac{9+7}{4}=4$$

よって，α，$\overline{\alpha}$を解とする 2 次方程式は，解と係数の関係より，

$$x^2-3x+4=0$$

(2) まず，x^3+ax^2+bx+cをx^2-3x+4で割ると，

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-3x+4)(x+a+3)+(3a+b+5)x+(-4a+c-12)$$

ここで，3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$は，解としてα，$\overline{\alpha}$をもつので，

$$3a+b+5=0\cdots\cdots\cdots①,\quad -4a+c-12=0\cdots\cdots\cdots②$$

このとき，もう 1 つの解は，$x=-a-3$となり，条件より，

$$0\leqq -a-3\leqq 1,\quad -4\leqq a\leqq -3$$

すると，aは整数より，$a=-4,\ -3$

$a=-4$のとき，①より$b=7$，②より$c=-4$となり，また$a=-3$のとき，①より$b=4$，②より$c=0$となり，b, cも整数である。

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-4,\ 7,\ -4)$，$(-3,\ 4,\ 0)$

[解 説]

複素数と方程式の基本題です。(2)では，3 次方程式の解と係数の関係を利用するという手もあります。

© 電送数学舎 2006