$\boxed{1}$

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ 0,\ 1)$から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1+2=3,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ 1,\ -1)$なので，D の座標は$\mathrm{D}(0,\ 1,\ -1)$である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$より，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2&=|s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=s^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+t^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2+2st\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-2t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2s\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=3s^2+5t^2+1+6st-2s=3s^2+(6t-2)s+5t^2+1\\&=3\left(s+\frac{3t-1}{3}\right)^2+2t^2+2t+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

よって，$s=-\dfrac{3t-1}{3}$のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$は最小になる。

(3) (2)より，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=3\left(s+\dfrac{3t-1}{3}\right)^2+2\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{6}$となり，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$が最小になるのは，$s+\dfrac{3t-1}{3}=0$かつ$t+\dfrac{1}{2}=0$のときである。

すなわち，$s=\dfrac{5}{6}$，$t=-\dfrac{1}{2}$のときである。

(4) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_0\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

また，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}=-\dfrac{1}{2}$から，

$$\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

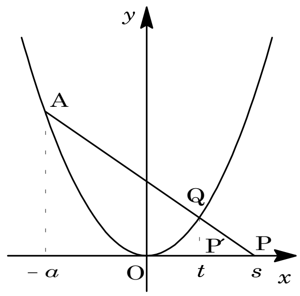
よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

[解 説]

問題文からはいかめしい雰囲気が漂っていますが，内容はベクトルの基本題です。

2

問題のページへ



(1)　直線APの方程式は，$y-a^2=\dfrac{-a^2}{s+a}(x+a)$

放物線C：$y=x^2$との交点は，

$$x^2-a^2=\frac{-a^2}{s+a}(x+a)$$

$$(x+a)(x-a)+\frac{a^2}{s+a}(x+a)=0$$

$x\neq -a$より，$x=a-\dfrac{a^2}{s+a}=\dfrac{as}{s+a}$から，

$$t=\frac{as}{s+a}$$

(2)　(1)と同様に考えると，$x_{n+1}=\dfrac{ax_n}{x_n+a}$

ここで，$x_1=c>0$より，帰納的に$x_n>0$となることより，

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{x_n+a}{ax_n}=\frac{1}{x_n}+\frac{1}{a}$$

$u_n=\dfrac{1}{x_n}$より，$u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{a}$となり，

$$u_n=u_1+\frac{1}{a}(n-1)=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}(n-1)=\frac{a+c(n-1)}{ac}$$

(3)　(2)より，$x_n=\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{ac}{a+c(n-1)}$

よって，$S_n=\dfrac{1}{2}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\cdot\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_n=\dfrac{1}{2}(x_n-x_{n+1}){x_{n+1}}^2$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{ac}{a+c(n-1)}-\frac{ac}{a+cn}\right\}\cdot\frac{a^2c^2}{(a+cn)^2}=\frac{a^3c^4}{2\{a+c(n-1)\}(a+cn)^3}$$

$$n^rS_n=\frac{a^3c^4n^r}{2\{a+c(n-1)\}(a+cn)^3}=\frac{a^3c^4n^{r-4}}{2\left\{\frac{a}{n}+c\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}\left(\frac{a}{n}+c\right)^3}$$

これより，$r\geqq 5$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^rS_n=\infty$，$r\leqq 3$ のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^rS_n=0$となるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^rS_n$が正の実数値に収束するのは，$r=4$のときであり，このとき，

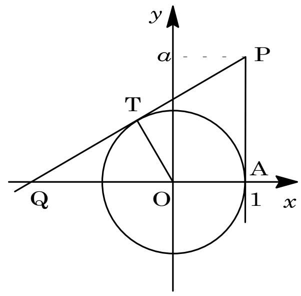
$$\lim_{n\to\infty}n^rS_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a^3c^4}{2\left\{\frac{a}{n}+c\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}\left(\frac{a}{n}+c\right)^3}=\frac{a^3}{2}$$

[解 説]

問題文が長いですが，題意を正確に読み取れば，立式やその後の計算は平易です。

3

問題のページへ



(1)　円 C と l との接点を T とおくと，

$$\frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{OQ}}=\frac{\mathrm{PA}}{\mathrm{PQ}}$$

そこで，$\mathrm{Q}(q,\ 0)$ とすると，

$$\frac{1}{-q}=\frac{a}{\sqrt{(1-q)^2+a^2}},\ \sqrt{(1-q)^2+a^2}=-aq$$

両辺を 2 乗して，$(a^2-1)q^2+2q-(a^2+1)=0$

$$\{(a^2-1)q+a^2+1\}(q-1)=0$$

$q\neq 1$ より，$q=-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$

よって，$L=1-q=1+\dfrac{a^2+1}{a^2-1}=\dfrac{2a^2}{a^2-1}$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{QA}\cdot\mathrm{PA}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2a^2}{a^2-1}\cdot a=\dfrac{a^3}{a^2-1}$ より，

$$S'=\frac{3a^2(a^2-1)-a^3\cdot 2a}{(a^2-1)^2}=\frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}$$

a	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
S'		$-$	0	$+$
S		↘		↗

右表より，$a=\sqrt{3}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

[解 説]

図形と式および微分法についての基本問題です。なお，(1)は，いろいろな解き方が考えられます。

4

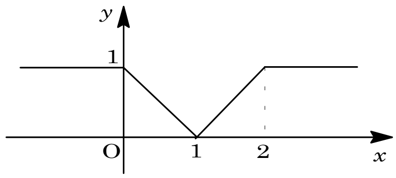
問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=1$ （$x<0$ または $x>2$）

$f(x)=-x+1$ （$0\leqq x\leqq 1$）

$f(x)=x-1$ （$1\leqq x\leqq 2$）

したがって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



さて，$g(x)=f(f(x))$ については,

(i)　$x<0$ または $x>2$ のとき

$g(x)=f(1)=0$

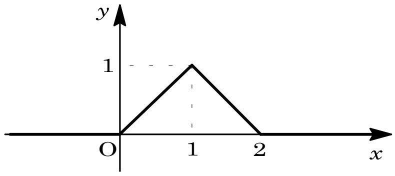
(ii)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$g(x)=f(-x+1)=-(-x+1)+1=x$

(iii)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$g(x)=f(x-1)=-(x-1)+1=-x+2$

したがって，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$I=\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$ とおく。

$0\leqq x\leqq n^2$ のとき，$-n+1\leqq\frac{x-n^2+n}{n}\leqq 1$ より，

(i)　$-n+1\leqq\frac{x-n^2+n}{n}\leqq 0$ $(0\leqq x\leqq n^2-n)$ のとき　$g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)=0$

(ii)　$0\leqq\frac{x-n^2+n}{n}\leqq 1$ $(n^2-n\leqq x\leqq n^2)$ のとき　$g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)=\frac{x-n^2+n}{n}$

(i)(ii)より，$I=\int_{n^2-n}^{n^2}\frac{x-n^2+n}{n}\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$

ここで，$\frac{x}{n}=t$ とおくと，$\frac{1}{n}dx=dt$ より，

$$I=\int_{n-1}^{n}(t-n+1)\cos\pi t\cdot n\,dt=\frac{n}{\pi}\Big[(t-n+1)\sin\pi t\Big]_{n-1}^{n}-\frac{n}{\pi}\int_{n-1}^{n}\sin\pi t\,dt$$

$$=\frac{n}{\pi^2}\Big[\cos\pi t\Big]_{n-1}^{n}=\frac{n}{\pi^2}\left\{\cos n\pi-\cos(n-1)\pi\right\}$$

$$=\frac{n}{\pi^2}\left\{(-1)^n-(-1)^{n-1}\right\}=\frac{2n}{\pi^2}(-1)^n$$

[解 説]

関数の合成および定積分の計算について，基本の確認問題です。

5

問題のページへ

(1)　A の中に 3 のカードが x 枚, 9 のカードが $6-x$ 枚入っているとする。また, D の中のカードには数字 n が書かれているとする。

条件(i)より，$3\times\dfrac{x}{6}+9\times\dfrac{6-x}{6}=n$ なので，$9-x=n$ ………①

条件(ii)より，$p(\mathrm{D},\ \mathrm{A})=\dfrac{2}{3}$ なので, $4\leqq n\leqq 8$ であり，しかも A から 3 のカードを抜く確率が $\dfrac{2}{3}$ であることから,

$$\frac{x}{6}=\frac{2}{3},\ x=4$$

①に代入すると，$n=5$

したがって, A の中の 3 のカードは 4 枚, また D の中のカードに書かれた数字は 5 である。

(2)　B の中に数字 k のカードが y 枚, 数字 l のカードが $6-y$ 枚入っているとする。ただし, $k<l$ とする。

条件(i)より，$k\times\dfrac{y}{6}+l\times\dfrac{6-y}{6}=5$ なので，$ky+l(6-y)=30$ ………②

条件(ii)より，$p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\dfrac{2}{3}$ なので, $k<l<3$ の場合はありえない。

(a)　$k<3\leqq l<9$ のとき

$p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{y}{6}+\dfrac{1}{3}\times 1$ から，$\dfrac{y}{9}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ より $y=3$ となる。

このとき，②から $k+l=10$ となり, $k<3\leqq l<9$ を満たすのは,

$$k=2,\ l=8$$

(b)　$k<3<l=9$ のとき

$p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{y}{6}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{y}{6}$ から，$\dfrac{y}{6}=\dfrac{2}{3}$ より $y=4$ となる。

このとき，②から $2k+9=15$ となり，$k=3$ であるので，適さない。

(c)　$3\leqq k<l<9$ のとき

$p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\dfrac{1}{3}\times 1=\dfrac{1}{3}$ となり，適さない。

(d)　$3\leqq k<l=9$ のとき

$p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{y}{6}=\dfrac{y}{18}$ となり，$\dfrac{y}{18}=\dfrac{2}{3}$ から $y=12$ であるので，適さない。

(a)～(d)より, B の中のカードは，数字 2 が 3 枚，数字 8 が 3 枚である。

(3)　C の中に数字 i のカードが z 枚, 数字 j のカードが $6-z$ 枚入っているとする。ただし，$i<j$ とする。

条件(i)より，$i\times\dfrac{z}{6}+j\times\dfrac{6-z}{6}=5$ なので，$iz+j(6-z)=30$ ………③

条件(ii)より，$p(\mathrm{C},\ \mathrm{D})=\dfrac{2}{3}$ なので，$i\leqq 5<j$ となる。

$p(\mathrm{C},\ \mathrm{D})=\dfrac{6-z}{6}\times 1$ となり，$\dfrac{6-z}{6}=\dfrac{2}{3}$ から $z=2$ となる。

このとき，③から $i+2j=15$ となり，$i\leqq 5<j$ を満たすのは，

$(i,\ j)=(1,\ 7),\ (3,\ 6)$

(a)　$(i,\ j)=(1,\ 7)$ のとき

$p(\mathrm{B},\ \mathrm{C})=\dfrac{3}{6}\times\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{6}\times 1=\dfrac{2}{3}$

(b)　$(i,\ j)=(3,\ 6)$ のとき

$p(\mathrm{B},\ \mathrm{C})=\dfrac{3}{6}\times 1=\dfrac{1}{2}$ となり，適さない。

(a)(b)より, C の中のカードは，数字 1 が 2 枚，数字 7 が 4 枚である。

[解 説]

パズルのような問題です。場合分けを丁寧に行い，論理を一歩ずつ詰めていくという作業が要求されます。