1　解答解説のページへ

Oを原点とする空間の3点A(1, 1, 1)，B(1, 2, 0)，C(0, 0, 1)がある。

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

を満たす点を D とする。ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1)　Dの座標を求めよ。

(2)　2つの実数 s と t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点を P とする。t を固定して考えたとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ。

(4)　(3)で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする。s_0 と t_0 に対し，P_0 を $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s_0\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t_0\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす点とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

となることを示せ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

a を正の実数とする。xy 平面上の放物線 $C : y = x^2$ 上に点 $\mathrm{A}(-a,\ a^2)$ をとる。$s>0$ のとき, x 軸上の点 $\mathrm{P}(s,\ 0)$ に対して, 直線 AP と C の 2 つの交点のうち, A とは異なる交点を $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ とする。Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $\mathrm{P}'(t,\ 0)$ とする。いま, x 軸上の点 $\mathrm{P}_1(c,\ 0)$ $(c>0)$ から出発して, 点 P に対して点 Q, P′ を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1, P_2 を定め, 同様に P_2 から点 Q_2, P_3 を定め, この方法を繰り返して, P_1, P_2, P_3, …と Q_1, Q_2, Q_3, …を定める。次の問いに答えよ。

(1) t を a と s を用いて表せ。

(2) 点 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の x 座標を x_n とする。数列 $\{u_n\}$ を $u_n = \dfrac{1}{x_n}$ で定める。$\{u_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 直角三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n で表す。自然数 r を選んで, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するようにできる。このような r の値とそのときの極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^r S_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を実数とし，$a>1$ とする。点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ を通り，円 $C : x^2+y^2=1$ と接する 2 本の直線のうち，$x=1$ とは異なる直線を l とする。l と x 軸の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}(1,\ 0)$ とする。線分 QA の長さ L を a を用いて表せ。

(2)　三角形 PQA の面積を S とする。a が $a>1$ の範囲を動くとき，S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数$f(x)$を

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x<0\text{または}x>2\text{のとき} \\ |x-1| & 0\leqq x\leqq 2\text{のとき} \end{cases}$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=f(f(x))$とおく。関数$y=g(x)$のグラフをかけ。

(2)　nを自然数とする。$\displaystyle\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)\cos\frac{\pi x}{n}\,dx$を求めよ。

5

解答解説のページへ

A, B, C, D 4 つの袋の中にそれぞれ 6 枚のカードが入っている。それぞれのカードには 1 から 9 までの数字の 1 つが書かれている。A, B, C, D の袋の中のカードは次の 4 つの条件を満たしているとする。

(i)　袋の中からカードを無作為に 1 枚抜いたとき，カードに書かれている数字の期待値は, A, B, C, D すべて同じである。

(ii)　$p(\mathrm{A},\ \mathrm{B}) = p(\mathrm{B},\ \mathrm{C}) = p(\mathrm{C},\ \mathrm{D}) = p(\mathrm{D},\ \mathrm{A}) = \dfrac{2}{3}$ である。ここで，$p(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})$ は袋 X と袋 Y からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に抜いたとき, X から抜いたカードに書かれている数字が Y から抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す。

(iii) A，B，C の袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ 2 種類で，D の袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている。

(iv) A の袋の中のカードに書かれている数字の種類は 3 と 9 である。

次の問いに答えよ。

(1)　A の袋の中の 3 の書かれているカードの枚数と，D の袋の中のカードに書かれた数字を求めよ。

(2)　B の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。

(3)　C の袋の中のカードに書かれている 2 種類の数字と，そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。