

1

問題のページへ

$$(1) \quad ABC = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad BCAB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ar+cs \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$kB = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{なので, } BCAB = kB \text{ より, } k = ar + cs$$

(3) $k \neq 0$ のとき, $(ABC)^n = k^{n-1}ABC$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき 明らかに成立する。

(ii) $n=l$ のとき $(ABC)^l = k^{l-1}ABC$ が成立すると仮定する。

$$(ABC)^{l+1} = k^{l-1}ABCABC = k^{l-1}A(BCAB)C = k^{l-1}AkBC = k^lABC$$

よって, $n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, $(ABC)^n = k^{n-1}ABC$

また, $k=0$ のときは, $n=2$ では明らかに $(ABC)^n = k^{n-1}ABC$ であるので,

$$(ABC)^n = (ar+cs)^{n-1} \begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}$$

なお, $n=1$, $k=ar+cs=0$ のときは, $(ABC)^n = \begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}$ である。

[解 説]

行列 B に左から BCA をかけることは, B を k 倍することに等しくなります。これを用いて(3)の結論を予測しました。なお, 0^0 は存在しないので, 場合分けをしています。

2

問題のページへ

(1) $\alpha = \cos \frac{360^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ}{5}$ より, $\alpha^5 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$ である。

条件より, $z_1 = \alpha$ から $z_2 = \alpha^3$ となり, $z_3 = (\alpha^3)^3 = \alpha^9 = \alpha^5 \cdot \alpha^4 = \alpha^4$

$$z_4 = (\alpha^4)^3 = \alpha^{12} = \alpha^{10} \cdot \alpha^2 = \alpha^2, \quad z_5 = (\alpha^2)^3 = \alpha^6 = \alpha^5 \cdot \alpha = \alpha$$

(2) (1)より, $z_5 = \alpha$ なので, 数列 $\{z_n\}$ は, $\alpha, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^2$ をくり返す周期 4 の周期数列である。これより, $z_n = \alpha$ となるのは, $n = 4k + 1$ ($k \geq 0$) のときである。

すると, $1 \leq n \leq 100$ より $0 \leq k \leq 24$ となり, $z_n = \alpha$ となる n は 25 個存在する。

(3) $\alpha^5 = 1$ より, $(\alpha - 1)(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1) = 0$

$\alpha \neq 1$ より, $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ となるので, (2)より,

$$\sum_{n=1}^{100} z_n = (\alpha + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^2) \times 25 = (-1) \times 25 = -25$$

[解 説]

(2)の周期性を丁寧に記述するならば, 数学的帰納法の登場です。

3

問題のページへ

条件より, $a^x = x$ ($a > 0, x > 0$) なので,



$$x \log a = \log x, \log a = \frac{\log x}{x} \dots\dots\dots(*)$$

ここで, $f(x) = \frac{\log x}{x}$ とおくと,

$$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

すると, $f(x)$ の増減は右表のようになり, (*) が任意の正の実数 x に対して成り立つ条件は,

$$\log a = f(e) = \frac{1}{e}, a = e^{\frac{1}{e}}$$

x	0	...	e	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

[解 説]

有名頻出問題がノーヒントで出ています。

4

問題のページへ

- (1) 初項 1, 公比 e^{-kt} の無限等比級数の和 $f_k(t)$ は, $t > 0, k > 1$ から $|e^{-kt}| < 1$ なので,

$$f_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)} = \frac{1}{1 - e^{-kt}}$$

(2) $F_k(x) = \int_1^x f_k(t) dt = \int_1^x \frac{1}{1 - e^{-kt}} dt = \int_1^x \frac{e^{kt}}{e^{kt} - 1} dt$

ここで, $e^{kt} - 1 = u$ とおくと, $ke^{kt} \frac{dt}{du} = 1$ となり,

$$F_k(x) = \int_{e^k - 1}^{e^{kx} - 1} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{k} [\log |u|]_{e^k - 1}^{e^{kx} - 1} = \frac{1}{k} \{ \log(e^{kx} - 1) - \log(e^k - 1) \}$$

よって, $F_k(x) = \frac{1}{k} \log \frac{e^{kx} - 1}{e^k - 1}$

(3) (2)より, $F_k(x) = \frac{1}{k} \log \frac{e^{kx} - 1}{e^k - 1} = \frac{1}{k} \log \left(\frac{1 - e^{-kx}}{1 - e^{-k}} \cdot \frac{e^{kx}}{e^k} \right)$

$$= \frac{1}{k} \log \frac{1 - e^{-kx}}{1 - e^{-k}} + \frac{1}{k} \log e^{k(x-1)} = \frac{1}{k} \log \frac{1 - e^{-kx}}{1 - e^{-k}} + x - 1$$

よって, $\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(x) = x - 1$

[解 説]

数 の基本事項の理解を試すあっさりとした問題です。

5

問題のページへ

- (1) *印が3つ並べば終了なので、最小の得点は3である。

このとき、縦に3つ並ぶのが3種類、横に3つ並ぶのが3種類、斜めの3つ並ぶのが2種類、合わせて8種類の場合がある。

そのいずれの場合も、起こる確率は $\frac{1}{9C_3}$ より、最小の得点となる確率は、

$$\frac{1}{9C_3} \times 8 = \frac{2}{21}$$

- (2) まず、*印が7つのときは、数字は2つだけしか残っておらず、このときいずれかの行または列に*印が3つ並んでいる。

次に、*印が6つのときは、数字は3つ残っている。この数字が、どの行にも、どの列にもあり、さらに斜めにも*印が3つないのは、右の2つの場合だけである。これより、最大の得点は7である。

*	*	8	5	*	*
*	9	*	*	9	*
7	*	*	*	*	6

数字が8, 9, 7と残っているとき、7回目はいずれのカードを並べても*印が3つ並ぶので、

その確率は、 $\frac{1}{9C_6} \times 1 = \frac{1}{84}$ である。数字が5, 9, 6と残っているときも、同様に、7

回目に*印が3つ並ぶ確率は $\frac{1}{84}$ である。

よって、最大の得点となる確率は、 $\frac{1}{84} \times 2 = \frac{1}{42}$ となる。

[解説]

パズルを解いていくおもしろさを感じます。もっとも、その過程を記述するのは、別ですが。