1

問題のページへ

(1)　$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ より，$w(z+i)=z-i$，$(w-1)z=-i(w+1)$

ここで，$w=1$ とすると成立しないので $w\neq 1$ から，$z=\dfrac{-i(w+1)}{w-1}$ ………①

条件より，z は実数なので，$z=\overline{z}$ ………②

①②より，$\dfrac{-i(w+1)}{w-1}=\dfrac{i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}$，$-(w+1)(\overline{w}-1)=(\overline{w}+1)(w-1)$

$2w\overline{w}=2$，$|w|=1$

よって，点 w は原点を中心とする半径 1 の円を描く。ただし，点 1 は除く。

(2)　$\dfrac{w_2}{w_1}=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\cdot\dfrac{z+i}{z-i}=\dfrac{z\overline{z}-i(z-\overline{z})+1}{z\overline{z}+i(z-\overline{z})+1}=\dfrac{|z|^2+1-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1+i(z-\overline{z})}$

ここで，$\overline{i(z-\overline{z})}=-i(\overline{z}-z)=i(z-\overline{z})$ より，$i(z-\overline{z})$ は実数となる。

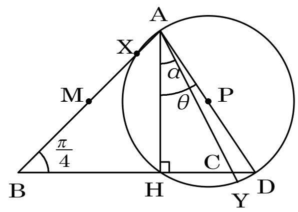
よって，$\dfrac{w_2}{w_1}$ は実数であり，この値を k とおくと $w_2=kw_1$ となることから，3 点 P, Q, O は同一直線上にある。

[解 説]

点 z が実軸上を動く条件を $|z+i|=|z-i|$ として数式化することもできますが，(2) との関連を考え，$z=\overline{z}$ を利用しました。

2

問題のページへ

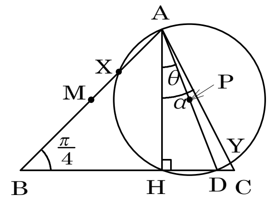


(1)　まず，直線 BC と 3 点 A，X，H を通る円との交点を D とすると，$\angle \mathrm{AHD} = \dfrac{\pi}{2}$ より，AD は円の直径となり，

$\mathrm{AD} = 2r$ である。

また，$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin\dfrac{\pi}{4} = 2\sin\dfrac{\pi}{4} = \sqrt{2}$ なので，

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AD}} = \frac{\sqrt{2}}{2r}$$



(2)　円の直径が AD より，$\angle \mathrm{AXD} = \dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$\mathrm{AX} = \mathrm{AD}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 2r\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= \sqrt{2}r(\cos\theta - \sin\theta)$$

次に，$\angle \mathrm{AYD} = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha \leqq \theta$ のとき，

$$\mathrm{AY} = \mathrm{AD}\cos(\theta - \alpha) = 2r(\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)$$

また，$\alpha > \theta$ のときは，$\mathrm{AY} = \mathrm{AD}\cos(\alpha - \theta)$ となるが，$\cos(\alpha - \theta) = \cos(\theta - \alpha)$ より，$\alpha \leqq \theta$ のときと一致する。

ここで, (1)より，$\sin\theta = \sqrt{1 - \dfrac{2}{4r^2}} = \dfrac{\sqrt{4r^2 - 2}}{2r}$ なので，

$$\mathrm{AX} + \mathrm{AY} = \sqrt{2}r\left(\frac{\sqrt{2}}{2r} - \frac{\sqrt{4r^2 - 2}}{2r}\right) + 2r\left(\frac{\sqrt{2}}{2r}\cos\alpha + \frac{\sqrt{4r^2 - 2}}{2r}\sin\alpha\right)$$
$$= 1 - \sqrt{2r^2 - 1} + \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{4r^2 - 2}\sin\alpha$$
$$= 1 + \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2r^2 - 1}(\sqrt{2}\sin\alpha - 1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$\mathrm{AX} + \mathrm{AY}$ が X の位置によらず一定である条件は，(*)が r の値によらず一定であることに等しいので，

$$\sqrt{2}\sin\alpha - 1 = 0,\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ である。

[解 説]

位置関係は少々複雑ですが，アバウトに考えても差し支えないように問題が構成されています。

3

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x+18)-(8x-12)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{\frac{1}{4}x}=\frac{(x-5)(x-6)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{\frac{1}{4}x}$$

$x \leqq 0$ のとき，$f(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$f'(x)=\frac{-(x^2-3x+18)-(8x-12)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\frac{-(x+2)(x+3)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

これより，$f(x)$ の増減をまとめると，右表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	5	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，極小値は 3 つ存在し，$f(-3)=\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$，$f(0)=\dfrac{1}{18}$，$f(6)=\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{36}$ である。

(2)　まず，$\dfrac{3}{2}>\dfrac{3}{4}$ より，$\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{36}>\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$ である。

次に，$e>2.7$ より，$e^3>(2.7)^3=19.683>2^4$ となり，$e^{\frac{3}{4}}>2$ である。これより，$\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}>\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$ である。

以上より，最小値は $f(0)=\dfrac{1}{18}$ である。

[解　説]

ミスが致命傷になる微分の計算問題です。

4

問題のページへ

(1)　$f(0)=f(\pi)=0$ を用いると，

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=-\left[\,f(x)\cos x\,\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\,dx$$

$$=0+\left[\,f'(x)\sin x\,\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,dx$$

$$=-\int_0^{\pi} f''(x)\sin x\,dx$$

(2)　$F(a)=\int_0^{\pi}\{af(x)-\sin x\}^2dx$ より，

$$F(a)=a^2\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx-2a\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx+\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

ここで，$\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx=\int_0^{\pi} x^2(x-\pi)^2dx=\int_0^{\pi}(x^4-2\pi x^3+\pi^2x^2)\,dx$

$$=\left[\,\frac{x^5}{5}-\pi\frac{x^4}{2}+\pi^2\frac{x^3}{3}\,\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^5}{30}$$

また，$f(0)=f(\pi)=0$ で，$f''(x)=2$ より, (1)の結果を用いると，

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx=-\int_0^{\pi} 2\sin x\,dx=-4$$

よって，$F(a)=\dfrac{\pi^5}{30}a^2+8a+\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx=\dfrac{\pi^5}{30}\left(a+\dfrac{120}{\pi^5}\right)^2-\dfrac{480}{\pi^5}+\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx$

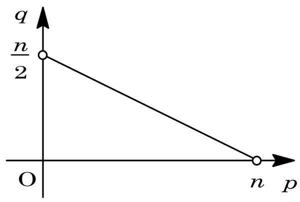
これより，$a=-\dfrac{120}{\pi^5}$ のとき，$F(a)$ は最小となる。

[解　説]

ミスが致命傷になる積分の計算問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ

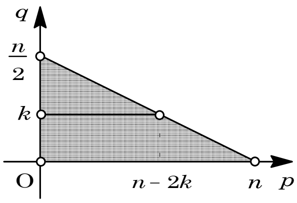


(1)　$p = n - 2q$ より, q が整数ならば p は整数となる。

　すると, $p>0$, $q>0$ を満たす格子点$(p,\ q)$の個数を a_n とすると,

(i)　n が偶数のとき　$a_n = \dfrac{n}{2} - 1$

(ii)　n が奇数のとき　$a_n = \dfrac{n-1}{2}$



(2)　$q = k$ 上の $p + 2q < n$, $p>0$, $q>0$ を満たす格子点は $n - 2k - 1$ 個あるので, 領域内の格子点の個数を b_n とすると,

(i)　n が偶数のとき

$$b_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(n-2k-1)$$

$$= (n-1)\left(\frac{n}{2}-1\right) - 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\frac{n}{2} = \frac{1}{4}(n-2)^2$$

(ii)　n が奇数のとき

$$b_n = \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k-1) = (n-1)\cdot\frac{n-1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2} = \frac{1}{4}(n-1)(n-3)$$

(3)　まず, $\dfrac{a_n}{n^2}$ について, n が偶数のとき $\dfrac{a_n}{n^2} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n^2} \to 0\ (n\to\infty)$, n が奇数のとき $\dfrac{a_n}{n^2} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n^2} \to 0\ (n\to\infty)$から, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} = 0$ である。

　次に, $\dfrac{b_n}{n^2}$ について, n が偶数のとき $\dfrac{b_n}{n^2} = \dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2 \to \dfrac{1}{4}\ (n\to\infty)$, n が奇数のとき $\dfrac{b_n}{n^2} = \dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right) \to \dfrac{1}{4}\ (n\to\infty)$から, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2} = \frac{1}{4}$ である。

[解 説]

格子点の個数を数えるのに場合分けが必要なケースです。しかし, 2 直線 $q = k$, $p + 2q = n$ の交点がつねに格子点となるので, さほど複雑ではありません。