

1

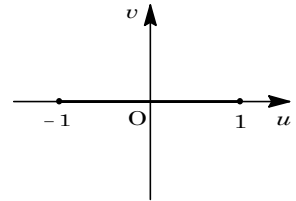
問題のページへ

(1) z が円 $|z|=1$ 上を動くので、 θ を任意の実数として、 $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく。

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left(\cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \right) \\ &= \frac{1}{2} (\cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta) = \cos\theta \end{aligned}$$

$$w = u + iv \text{ より, } u = \cos\theta, v = 0$$

$$\text{よって, } v = 0 \quad (-1 \leq u \leq 1)$$



(2) z が実軸からの偏角 α の半直線上を動くので、 $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ とおく。ただし、 $r > 0$ である。

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \left\{ r(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \frac{1}{r(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ r(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos\alpha + i \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin\alpha \right\} \end{aligned}$$

$$w = u + iv \text{ より, } u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos\alpha, v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin\alpha \text{ となり,}$$

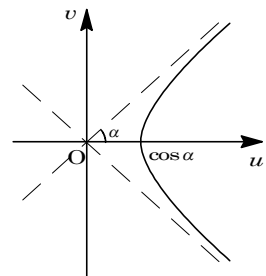
$$\left(\frac{u}{\cos\alpha} \right)^2 - \left(\frac{v}{\sin\alpha} \right)^2 = \frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2$$

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$$

漸近線は、 $v = \pm \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} u = \pm \tan\alpha \cdot u$ である。

なお、 $r > 0$ より $\frac{u}{\cos\alpha} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \geq \sqrt{r \cdot \frac{1}{r}} = 1$ 、また

$\frac{v}{\sin\alpha} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right)$ より v は任意の値をとる。



[解 説]

(2)では、双曲線のパラメータ表示が導けますが、このことに気付かずに r を消去しようすると複雑です。

2

問題のページへ

- (1) 領域 D_n 内において、 $x = k$ ($1 \leq k \leq n$) 上の格子点の個数は、
 $3k - k + 1 = 2k + 1$ なので、 D_n 内にある格子点の総数は、

$$\sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + n = n(n+2)$$

- (2) 領域 D_n 内における $x = k$ ($1 \leq k \leq n$) 上の格子点について、
 題意の成立することを、数学的帰納法を用いて証明する。

- (i) $k=1$ のとき $\overrightarrow{OP} = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ である。

このとき、この \overrightarrow{OP} は、それぞれ $(1, 1) = 1 \cdot \overrightarrow{v_1} + 0 \cdot \overrightarrow{v_2} + 0 \cdot \overrightarrow{v_3}$,
 $(1, 2) = 0 \cdot \overrightarrow{v_1} + 1 \cdot \overrightarrow{v_2} + 0 \cdot \overrightarrow{v_3}$, $(1, 3) = 0 \cdot \overrightarrow{v_1} + 0 \cdot \overrightarrow{v_2} + 1 \cdot \overrightarrow{v_3}$ と表
 することができる。

- (ii) $k=l$ のとき $\overrightarrow{OP} = (l, l), (l, l+1), \dots, (l, 3l)$ である。

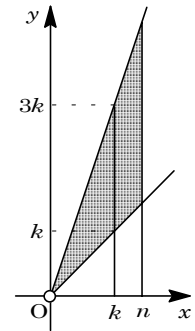
ここで、この \overrightarrow{OP} が、すべて $\overrightarrow{OP} = m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2} + m_3 \overrightarrow{v_3}$ と表せると仮定する。た
 だし、 m_1, m_2, m_3 は 0 以上の整数とする。

さて、 $k=l+1$ のときは、 $\overrightarrow{OP} = (l+1, l+1), (l+1, l+2), \dots, (l+1, 3l+1),$
 $(l+1, 3l+2), (l+1, 3l+3)$ であるが、

$$\begin{aligned} (l+1, l+1) &= (l, l) + \overrightarrow{v_1}, & (l+1, l+2) &= (l, l+1) + \overrightarrow{v_1}, & \dots, \\ (l+1, 3l+1) &= (l, 3l) + \overrightarrow{v_1}, & (l+1, 3l+2) &= (l, 3l) + \overrightarrow{v_2}, \\ (l+1, 3l+3) &= (l, 3l) + \overrightarrow{v_3} \end{aligned}$$

これより、 $k=l+1$ のときも、 $\overrightarrow{OP} = m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2} + m_3 \overrightarrow{v_3}$ の形で表せる。

- (i)(ii)より、領域 D_n 内における格子点 P は、 $\overrightarrow{OP} = m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2} + m_3 \overrightarrow{v_3}$ と表せる。



[解 説]

- (2)も(1)と同じように、直線 $x = k$ 上の格子点に注目して、証明をしてみました。

3

問題のページへ

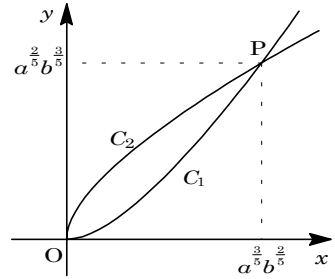
(1) 2 つの曲線 $C_1: ay^2 = x^3$ ($x \geq 0, y \geq 0$) …… , $C_2: bx^2 = y^3$ ($x \geq 0, y \geq 0$) …… の交点は,× より, $abx^2y^2 = x^3y^3$, $xy = ab$ ……より $y = \frac{ab}{x}$, に代入して $a^3b^2 = x^5$

$$x = (a^3b^2)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}, \quad y = \frac{ab}{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} = a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}$$

よって, $P(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}, a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}})$ となる。(2) より, $y = \sqrt{\frac{x^3}{a}} = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, より, $y = \sqrt[3]{bx^2} = b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$

と で囲まれる部分の面積は,

$$\begin{aligned} \int_0^{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} (b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}) dx &= \left[\frac{3}{5}b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}} \right]_0^{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} \\ &= \frac{3}{5}b^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}a^{-\frac{1}{2}}(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}})^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{3}{5}ab - \frac{2}{5}ab = \frac{1}{5}ab \end{aligned}$$

また, 条件より, $\frac{1}{5}ab = S$ より, $ab = 5S$ ここで, $P(x, y)$ とおくと, より $xy = 5S$ である。よって, 点 P の軌跡の方程式は, $xy = 5S$ となる。

[解 説]

見た目はすごいのですが, 内容は基本的です。ただ, (1)の曲線の概形については, 微分をして, もっと丁寧に書いた方がよいかもしれません。

4

問題のページへ

(1) $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であるのは、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在することである。

(2) 正しい命題は(ii)である。

たとえば、 $f(x) = |x - a|$ に対して、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$ であり、また $f(a) = 0$ なので、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ となる。すなわち $f(x)$ は $x = a$ において連続となっているが、

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{|x - a| - 0}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-0} \frac{-(x - a)}{x - a} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{|x - a| - 0}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{x - a}{x - a} = 1$$

これより、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ は存在しないので、 $f(x)$ は $x = a$ において微分可能ではない。

$$(3) \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-2 \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x - a}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow a} \sin \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = - \sin \frac{a+a}{2} \cdot 1 = - \sin a$$

したがって、 $f(x) = \cos x$ は $x = a$ において微分可能である。

[解 説]

微分の定義の確認問題です。(2)の例として、いちばん親しんでいるのは、上の関数でしょう。

5

問題のページへ

(1) (x_1, x_2, \dots, x_k) の数字の組は、 ${}_N P_k$ 通りある。

この中で $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ を満たすのは、 N 枚から k 枚をとり、書かれている数字を小さい順に x_1, x_2, \dots, x_k を対応させればよい。このとき、場合の数は ${}_N C_k$ 通りとなり、その確率は、

$$p = \frac{{}_N C_k}{{}_N P_k} = \frac{{}_N P_k}{k!} \cdot \frac{1}{{}_N P_k} = \frac{1}{k!}$$

(2) (x_1, x_2, \dots, x_i) の数字の組は、 ${}_N P_i$ 通りある。

この中で $x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1}$ かつ $x_{i-1} > x_i$ を満たすのは、 N 枚から i 枚をとり、最大数以外の数字を x_i とし、それ以外の $i-1$ 枚の書かれている数字を小さい順に x_1, x_2, \dots, x_{i-1} と対応させればよい。このとき、 x_i のとり方が $i-1$ 通りなので、(1)と同様に考えて、その場合の数は ${}_N C_i \times (i-1)$ 通りとなる。

また、 (x_{i+1}, \dots, x_k) の数字の組については任意であるので、

$$q_i = \frac{{}_N C_i \times (i-1)}{{}_N P_i} = \frac{i-1}{i!}$$

(3) 得点の期待値を E とすると、

$$E = \sum_{i=2}^5 i q_i = \sum_{i=2}^5 i \cdot \frac{i-1}{i!} = \sum_{i=2}^5 \frac{1}{(i-2)!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{8}{3}$$

[解 説]

(1)は有名問題です。また(2)では、それにひとひねりが加えられています。