

1

解答解説のページへ

0 でない複素数 z に対して, $w = u + iv$ を $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ とするとき, 次の問いに答えよ。ただし, u, v は実数, i は虚数単位である。

- (1) 複素数平面上で, z が単位円 $|z|=1$ 上を動くとき, w はどのような曲線を描くか。
 u, v が満たす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ。
- (2) 複素数平面上で, z が実軸からの偏角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) の半直線上を動くとき, w はどのような曲線を描くか。
 u, v が満たす曲線の方程式を求め, その曲線を図示せよ。

2

解答解説のページへ

正の整数 n に対して、連立不等式 $0 < x \leq n, x \leq y \leq 3x$ の表す領域を D_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) 領域 D_n 内にある格子点 $P(x, y)$ の個数を S_n とする。 S_n を n で表せ。ただし、格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである。
- (2) 原点 $O(0, 0)$ を始点とし、領域 D_n 内の格子点 $P(x, y)$ を終点とする位置ベクトル \overrightarrow{OP} は、ベクトル $\overrightarrow{v_1} = (1, 1), \overrightarrow{v_2} = (1, 2), \overrightarrow{v_3} = (1, 3)$ と 0 以上の整数 m_1, m_2, m_3 を用いて、 $\overrightarrow{OP} = m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2} + m_3 \overrightarrow{v_3}$ と表せることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

正の実数 a, b に対して, 2 つの曲線 $C_1: ay^2 = x^3$ ($x \geq 0, y \geq 0$), $C_2: bx^2 = y^3$ ($x \geq 0, y \geq 0$) の原点 O 以外の交点を P とする。次の問いに答えよ。

- (1) 交点 P の座標を求め, 2 つの曲線 C_1, C_2 の概形を描け。
- (2) 2 つの曲線 C_1, C_2 で囲まれる部分の面積を a と b で表せ。また, この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき, 点 P の軌跡の方程式を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は任意の実数 x に対して定義されているとする。次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が $x = a$ において微分可能であることの定義を述べよ。
- (2) 次の 2 つの命題のうち正しいものを選び、それが正しい理由を示せ。
 - (i) $f(x)$ が $x = a$ において連続ならば、必ず、 $f(x)$ は $x = a$ において微分可能である。
 - (ii) $f(x)$ が $x = a$ において連続であっても、 $f(x)$ は $x = a$ において微分可能であるとは限らない。
- (3) 関数 $f(x) = \cos x$ が $x = a$ において微分可能であることを、(1)で答えた定義を用いて証明せよ。

5

解答解説のページへ

数字 $1, 2, \dots, N$ の書かれたカードが 1 枚ずつ N 枚入っている箱から、元に戻さずに 1 枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える。ここで、 $2 \leq k \leq N$ とする。引いたカードの順に、書かれている数字を x_1, x_2, \dots, x_k とする。次の問いに答えよ。

- (1) $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, すなわち k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ。
- (2) i は整数で、 $2 \leq i \leq k$ を満たすとする。 $x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1}, x_{i-1} > x_i$ である確率、すなわち k 枚のカードのうち $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き、 i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ。
- (3) N は 5 以上の整数で、 $k=5$ とする。 $2 \leq i \leq 5$ を満たす各整数 i について上の(2)の事象が起こるとき、得点 i 点が与えられるとする。それ以外のときの得点は 0 点とする。このとき、得点の期待値を求めよ。