$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix} k & 4 \\ -1 & k-4 \end{pmatrix}$に対して, A の逆行列が存在しない条件は,

$$k(k-4)+4=0,\quad k^2-4k+4=0$$

$(k-2)^2=0$ より，$k=2$

(2)　A の逆行列が存在するとき，$AX=B$ より，$X=A^{-1}B$

$$X=\frac{1}{(k-2)^2}\begin{pmatrix} k-4 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}=\frac{1}{(k-2)^2}\begin{pmatrix} ak-4a-4 & k-4-4b \\ a+k & 1+bk \end{pmatrix}$$

(3)　A の逆行列が存在しないとき, (1)より，$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

$AX=B$ より，$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

$2p+4r=a$ ………①，$2q+4s=1$ ………②

$-p-2r=1$ ………③，$-q-2s=b$ ………④

連立方程式①～④が解をもつ条件は，①③より $a=-2$，②④より $b=-\dfrac{1}{2}$

[解 説]

行列の基本的な計算だけです。正確さがすべてです。

2

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\vec{b}+t(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{b})=\vec{b}+2t(\vec{a}+\vec{b})$$

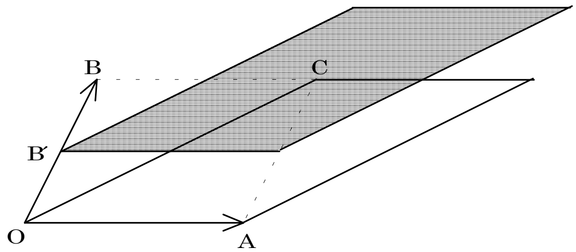
(2)　PQ の中点が M より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\frac{1}{2}\{\vec{b}+2t(\vec{a}+\vec{b})+2s\vec{a}\}=\frac{1}{2}\vec{b}+t(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{a}$$

ここで，$\frac{1}{2}\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

すると，$0\leqq t\leqq 1$，$0\leqq s\leqq 1$ より，点 M は OA, OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の内部または辺上を $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ の方向に平行移動した領域に存在する。図示すると右図の網点部となる。



[解　説]

神戸大頻出のベクトルと領域の融合問題です。本年度は，基本中の基本というレベルです。

3

問題のページへ

(1)　互いに素な自然数 m, n を用いて，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解を $x=\pm\dfrac{n}{m}$ とおくと，$\pm\dfrac{n^3}{m^3}+a\cdot\dfrac{n^2}{m^2}\pm b\cdot\dfrac{n}{m}+c=0$ となるので,

$$\pm n^3+amn^2\pm bm^2n+cm^3=0,\ \pm n^3=m(-an^2\mp bmn-cm^2)$$

さて, a, b, c は整数なので，$-an^2\mp bmn-cm^2$ は整数となり, m は n^3 の約数となる。ところが, m と n は互いに素なので，$m=1$ となる。

すると，$x=\pm n$ となり，解は整数である。

(2)　方程式 $x^3+2x^2+2=0$ が有理数の解をもつとすると, (1)より整数解となる。

ここで，$f(x)=x^3+2x^2+2$ とおくと，

$$f'(x)=3x^2+4x=x(3x+4)$$

x	$\cdots$	$-\dfrac{4}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗		↘	2	↗

右表より，$f(x)=0$ の実数解は $x<-\dfrac{4}{3}$ にただ 1 つ存在する。

さて，$f(-2)=2$, $f(-3)=-7$ より，この実数解は $-3<x<-2$ に存在することがわかるので，$f(x)=0$ は整数解をもたない。

よって，$f(x)=0$ は有理数の解をもたない。

[解 説]

(1)は有名問題です。(2)はグラフを用いて考えましたが，「やりすぎ」かもしれません。

4

問題のページへ

(1)　関数 $f(x)=1+\dfrac{1}{2x}+\dfrac{\log x}{x}$ に対して，

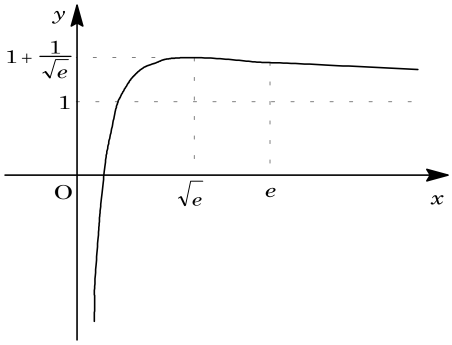
$$f'(x)=-\frac{1}{2x^2}+\frac{1-\log x}{x^2}=\frac{1-2\log x}{2x^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2x-(1-2\log x)\cdot 2x}{2x^4}=\frac{2(\log x-1)}{x^3}$$

x	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$1+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$	$\searrow$	$1+\dfrac{3}{2e}$	$\searrow$

すると，右上の表より，極大値は $1+\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ $(x=\sqrt{e})$，変曲点は $\left(e,\ 1+\dfrac{3}{2e}\right)$ となる。

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=1$ から，グラフの概形は右図のようになる。



(2)　$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{\log x}{x}\right)dx=\left[\,x+\frac{1}{2}\log x+\frac{1}{2}(\log x)^2\,\right]_{\frac{1}{e}}^{e}$

$$=e-\frac{1}{e}+\frac{1}{2}(1+1)+\frac{1}{2}(1-1)=e-\frac{1}{e}+1$$

[解 説]

教科書の例題のような問題です。

5

問題のページへ

(1)　A 君の得点と球の取り出し方は，右の表のようになる。

2 点		3 点	4 点		5 点
赤	白→白	白→赤	白→青	青→白	青→赤

青球は 1 個しかないので, B 君の得点が 4 点, 5 点となる場合はない。

(i)　A 君と B 君の得点がともに 2 点のとき

A 君が赤, B 君が赤または白→白と取り出す場合と，A 君が白→白，B 君が赤を取り出す場合より，その確率は,

$$\frac{2}{6}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\right)+\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{4}{15}$$

(ii)　A 君と B 君の得点がともに 3 点のとき

A 君が白→赤, B 君が白→赤と取り出す場合より，その確率は,

$$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{30}$$

(i)(ii)より，$p_1=\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{30}=\dfrac{3}{10}$

(2)　(i)　A 君の得点が 4 点または 5 点のとき

このとき，A 君の得点は B 君の得点より必ず大きくなる。A 君の得点が 4 点なのは白→青または青→白と取り出す場合，5 点なのは青→赤と取り出す場合より，その確率は,

$$\frac{3}{6}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

(ii)　A 君の得点が 3 点, B 君の得点が 2 点のとき

A 君が白→赤, B 君が赤または白→白と取り出す場合より，その確率は,

$$\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{12}$$

(i)(ii)より，$p_2=\dfrac{4}{15}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{7}{20}$

[解 説]

確率の問題というよりは場合分けの問題です。怖いのはケアレスミスです。