

1

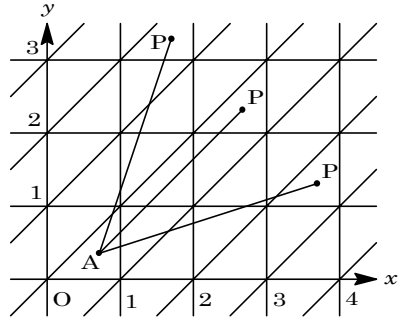
問題のページへ

点  $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$  から点  $P\left(m + \frac{2}{3}, n + \frac{1}{3}\right)$  に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値は、線分  $AP$  が横切る直線の本数に等しい。

まず、線分  $AP$  は  $y$  軸に平行な直線を  $m$  本横切り、 $x$  軸に平行な直線を  $n$  本横切る。

また、 $y = x$  に平行な直線については、 $m$  と  $n$  の大小関係によって横切る直線の本数が決まる。

そこで、 $f(x, y) = y - x - k$  とし、条件を満たす整数  $k$  の個数を求める。



(i)  $m = n$  のとき

線分  $AP$  は、 $y = x$  に平行な直線を横切らないので、求める直線の本数は  $m + n$  となる。

(ii)  $m < n$  のとき

$f\left(m + \frac{2}{3}, n + \frac{1}{3}\right) > 0$  かつ  $f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) < 0$  となるので、

$$n + \frac{1}{3} - m - \frac{2}{3} - k > 0, \quad \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - k < 0$$

よって  $-\frac{1}{3} < k < n - m - \frac{1}{3}$  となり、これを満たす整数  $k$  は  $k = 0, 1, \dots, n - m - 1$

なので、 $n - m$  個存在する。

すなわち、線分  $AP$  は、 $n - m$  本の  $y = x$  に平行な直線を横切ることより、求める直線の本数は  $m + n + n - m = 2n$  となる。

(iii)  $m > n$  のとき

$f\left(m + \frac{2}{3}, n + \frac{1}{3}\right) < 0$  かつ  $f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) > 0$  から、 $n - m - \frac{1}{3} < k < -\frac{1}{3}$  となり、これを満たす整数  $k$  は  $k = n - m, n - m + 1, \dots, -1$  なので、 $m - n$  個存在する。

すなわち、線分  $AP$  は、 $m - n$  本の  $y = x$  に平行な直線を横切るため、求める直線の本数は  $m + n + m - n = 2m$  となる。

### [ 解 説 ]

どこまで論理をかけばよいのか迷ってしまう問題です。時間があれば丁寧に、なければ直観的に、というのが妥当な線でしょう。

2

問題のページへ

$x : y = s : t$  より,  $(x, y) \neq (0, 0)$  のとき,  $\frac{s}{x} = \frac{t}{y}$  と変形すると,  $k > 0$  として,

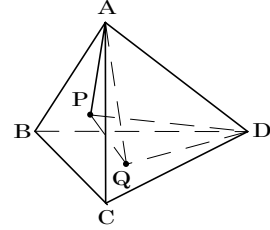
$$s = kx, \quad t = ky$$

すると, 条件より,

$$\overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD} = k(x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}) + u\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \text{ なので, } \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} + u\overrightarrow{AD}$$

よって, Q は 3 点 A, P, D で決まる平面上にあり, 四角形 APQD の 2 本の対角線である線分 AQ と DP は交わる。



また,  $x = 0, y \neq 0$  のとき,  $s = 0$  となるので,

$$\overrightarrow{AP} = y\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AC} + u\overrightarrow{AD}$$

よって, P は辺 AC 上の点, Q は面 BCD と面 ACD の交線である辺 CD 上の点となり, 線分 AQ と DP は面 ACD 上で交わる。

さらに,  $y = 0, x \neq 0$  のとき,  $t = 0$  となるので,

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AQ} = s\overrightarrow{AB} + u\overrightarrow{AD}$$

よって, P は辺 AB 上の点, Q は面 BCD と面 ABD の交線である辺 BD 上の点となり, 線分 AQ と DP は面 ABD 上で交わる。

なお,  $(x, y) = (0, 0)$  のときは, 点 P は点 A と一致し, 任意の  $(s, t)$  に対して線分 AQ と DP は点 A で交わる。

以上より,  $x : y = s : t$  ならば, 線分 AQ と DP は交わる。

### [ 解 説 ]

$x : y = s : t$  という式を見たとき, 場合分けをしようか,  $x, y$  の値が明らかに正としようか迷いました。前者の立場で解を作りましたが, 後者でもよかったかもしれません。

3

問題のページへ

(1)  $f(x) = x(1-x) = -x^2 + x$ ,  $f'(x) = -2x + 1$  なので,  $0 < x < \frac{1}{2}$  において,

$f'(x) > 0$  となり  $f(x)$  は単調増加となる。

$$\text{また, } g(x) = \frac{2x}{2+x} = 2 + \frac{-4}{x+2}$$

ここで,  $h(x) = x - g(x) = x - 2 + \frac{4}{x+2}$  とおくと,

$$h'(x) = 1 - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

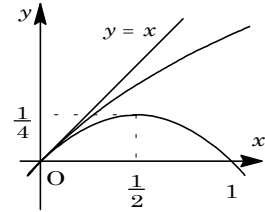
$x > 0$  のとき  $h'(x) > 0$  より,  $h(x) > h(0) = 0$

また,  $k(x) = g(x) - f(x) = 2 + \frac{-4}{x+2} + x^2 - x$  とおくと,

$$k'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} + 2x - 1 = \frac{4 + (2x-1)(x+2)^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^3 + 7x^2 + 4x}{(x+2)^2}$$

$x > 0$  のとき  $k'(x) > 0$  より,  $k(x) > k(0) = 0$

以上より,  $x > 0$  のとき,  $f(x) < g(x) < x$



(2)  $n = 1$  のとき,  $0 < a_n < b_n < \frac{1}{2}$  であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)  $n = 1$  のとき  $0 < a_0 = b_0 < \frac{1}{2}$  なので, (1)より  $f(0) < f(a_0) = f(b_0) < g(b_0)$ ,

さらに,  $x > 0$  のとき  $g(x)$  は単調増加なので,  $g(b_0) < g\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$  となる。

以上まとめて,  $f(0) < f(a_0) < g(b_0) < \frac{1}{2}$  なので,  $0 < a_1 < b_1 < \frac{1}{2}$

(ii)  $n = k$  のとき  $0 < a_k < b_k < \frac{1}{2}$  と仮定して, (i)と同様にすると,

$$f(0) < f(a_k) < f(b_k) < g(b_k) < g\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} \text{ より, } 0 < a_{k+1} < b_{k+1} < \frac{1}{2}$$

(i)(ii)より,  $n = 1$  のとき,  $0 < a_n < b_n < \frac{1}{2}$

(3)  $b_{n+1} = g(b_n) = \frac{2b_n}{2+b_n}$  で, (2)から  $0 < b_n$  なので,  $\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2+b_n}{2b_n} = \frac{1}{b_n} + \frac{1}{2}$

$$\text{よって, } \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b_0} + \frac{1}{2}n = \frac{2+b_0n}{2b_0} \text{ より, } b_n = \frac{2b_0}{2+b_0n}$$

### [ 解 説 ]

(1)(2)の流れから, (3)は数列の極限かと思いましたが, はずれてしまいました。なお, (1)は上の解のように微分するまでもありませんでした。

4

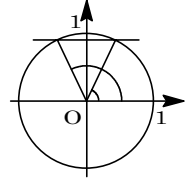
問題のページへ

$$(1) f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x} \text{ より,}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x(\sqrt{6} - 2\sin x) - \cos x(-2\cos x)}{(\sqrt{6} - 2\sin x)^2} = \frac{2 - \sqrt{6}\sin x}{(\sqrt{6} - 2\sin x)^2}$$

$$(2) f'(x) = 0 \text{ とすると, } \sin x = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

この解を  $x = \alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とおくと,  $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{\sqrt{6}}$  なの  
で, 増減表より,  $x = \beta$  のとき  $f(x)$  は最小値をとる。



このとき,  $\sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$  なので,

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって, 最小値は,

$$f(\beta) = \frac{\cos \beta}{\sqrt{6} - 2\sin \beta} = \frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x$	0	...	$\alpha$	...	$\beta$	...	$2\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$

$$(3) f(x) = 0 \text{ とすると, } x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \text{ となる。求める面積を } S \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} S &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x} dx = -\int_1^{-1} \frac{1}{\sqrt{6} - 2t} dt \quad (\sin x = t \text{ とおく}) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \log |\sqrt{6} - 2t| \right]_1^{-1} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{6} + 2}{\sqrt{6} - 2} \\ &= \frac{1}{2} \log(5 + 2\sqrt{6}) = \log(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

### [ 解 説 ]

数 微積分の典型題です。極値をとる  $x$  の値が求まらないので, これを文字で設定し, その条件を用いて極値を求める問題です。

5

問題のページへ

(1) 原点と点 $(a, 0)$ を直径の両端とする円なので、

$$r = a \cos \theta$$

(2)  $x$  軸に関する対称性より、 $0 < \theta < \pi$  で考える。

$$OP = a(1 + \cos \theta), \quad OQ = a|\cos \theta|$$

(i)  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  のとき

$$PQ = OP - OQ = a(1 + \cos \theta) - a \cos \theta = a$$

(ii)  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  のとき

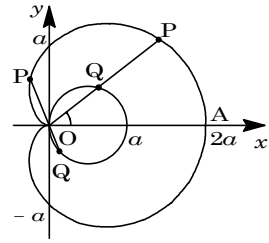
$$PQ = OP + OQ = a(1 + \cos \theta) - a \cos \theta = a$$

(3)  $A(2a, 0)$  とおき、 $0 < \theta < \pi$  のとき、 $\triangle OAP$  に余弦定理を適用して、

$$\begin{aligned} AP^2 &= OP^2 + OA^2 - 2OP \cdot OA \cos \theta = r^2 + 4a^2 - 2r \cdot 2a \cos \theta \\ &= a^2(1 + \cos \theta)^2 + 4a^2 - 4a \cos \theta \cdot a(1 + \cos \theta) \\ &= 5a^2 - 2a^2 \cos \theta - 3a^2 \cos^2 \theta \\ &= -3a^2 \left( \cos \theta + \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{16}{3} a^2 \end{aligned}$$

また、 $\theta = 0$  のとき  $AP^2 = 0$ 、 $\theta = \pi$  のとき  $AP^2 = 4a^2$  となる。

よって、 $\cos \theta = -\frac{1}{3}$  のとき、 $AP^2$  は最大値  $\frac{16}{3} a^2$  をとる。このとき  $AP$  は最大値  $\frac{4}{\sqrt{3}} a$  をとる。



## [ 解 説 ]

有名は曲線カージオイドを題材とした問題です。なお、極方程式は  $r < 0$  の場合もあるので、注意しなくてはなりません。