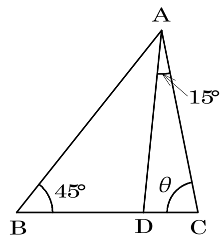
1

問題のページへ



(1)　$\sin 15° = \sin(60° - 45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$\angle \mathrm{ACB} = \theta$ とおくと，$\angle \mathrm{BAD} = 120° - \theta$ となる。

△ABD に正弦定理を適用して，$\dfrac{1}{\sin(120° - \theta)} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\sin 45°}$

$$\mathrm{AD} = \frac{\sin 45°}{\sin(120° - \theta)} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(120° - \theta)} \cdots\cdots\cdots ①$$

△ADC に正弦定理を適用して，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin 15°}$

$$\mathrm{AD} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sin\theta}{\sin 15°} = \frac{4\sin\theta}{\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(120° - \theta)} = \dfrac{4\sin\theta}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta\sin(120° - \theta) = \dfrac{1}{4}$

$$-\frac{1}{2}\{\cos 120° - \cos(2\theta - 120°)\} = \frac{1}{4},\quad \cos(2\theta - 120°) = 0$$

ここで $\theta > 0°$，$120° - \theta > 0°$，また条件より $\theta + 15° \geqq 90°$ なので，$75° \leqq \theta < 120°$

よって，$2\theta - 120° = 90°$，$\theta = \angle \mathrm{ACB} = 105°$

［解 説］

正弦定理の応用問題です。なお，△ABC は計算の結果では鈍角三角形となり，上の解に書いた図とは異なりますが，題意を図示すると，まずこのように書くのではないかと思い，敢えてそのままにしています。

2

問題のページへ

(1)　$|\alpha_1|=|\alpha_2|=|\alpha_3|=1$ より，

$$\alpha_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\quad \alpha_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2,\quad \alpha_3=\cos\theta_3+i\sin\theta_3$$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ より，

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=3\cdots\cdots①,\quad \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0\cdots\cdots②$$

①より，$\cos\theta_1=\cos\theta_2=\cos\theta_3=1$

すると $\sin\theta_1=\sin\theta_2=\sin\theta_3=0$ となり，②を満たす。

以上より，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$

(2)　$\omega=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ$ とおくと，$P(z)=\beta_2z^2+\beta_1z+\omega$

$\frac{1}{\gamma}P(\gamma)=3$ から，$\beta_2\gamma+\beta_1+\frac{\omega}{\gamma}=3$

ここで，$|\beta_2\gamma|=|\beta_2||\gamma|=1$，$|\beta_1|=1$，$\left|\frac{\omega}{\gamma}\right|=\frac{|\omega|}{|\gamma|}=1$ より(1)を用いると，

$$\beta_2\gamma=\beta_1=\frac{\omega}{\gamma}=1$$

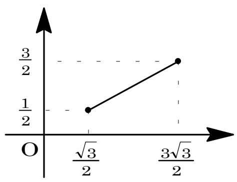
よって，$\beta_1=1$，$\gamma=\omega=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$

$$\beta_2=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\omega}=\cos 30^\circ-i\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

すると，$P(z)=\frac{1}{\omega}z^2+z+\omega$

$$P(\gamma t)=P(\omega t)=\frac{1}{\omega}\cdot(\omega t)^2+\omega t+\omega=(t^2+t+1)\omega$$

$0\leqq t\leqq 1$ より，$1\leqq t^2+t+1\leqq 3$ なので，点 $P(\gamma t)$ は 2 点 ω，3ω を結ぶ線分を描く。



[解 説]

複素数平面上では，α_1，α_2，α_3 が単位円周上にあることより，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ は明らかなのですが，それをスキッと示そうとすると，予想以上に困難でした。最初は，$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}=1$ として「重心」を使おうかと思いましたが，直観的すぎるのではないかと考え止めました。結局，極形式を用いた普通の方法に落ち着きました。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$ax^n-1=0$ （$x>0$）の解は $x=a^{-\frac{1}{n}}$ となり，$a^{-\frac{1}{n}}=\alpha$ とおくと $0<\alpha<1$ より，

$$\int_0^1|ax^n-1|dx=\int_0^\alpha-(ax^n-1)dx+\int_\alpha^1(ax^n-1)dx$$

$$=-\left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}-x\right]_0^\alpha+\left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}-x\right]_\alpha^1=-\frac{2a}{n+1}\alpha^{n+1}+2\alpha+\frac{a}{n+1}-1$$

$$=-\frac{2a}{n+1}\cdot\frac{1}{a}\alpha+2\alpha+\frac{a}{n+1}-1=\frac{2n}{n+1}\alpha+\frac{a}{n+1}-1\quad\left(a^{-\frac{1}{n}}=\alpha\text{ より}\right)$$

すると，$f(a)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1|ax^n-1|dx+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n}{n+1}\alpha+\dfrac{a}{n+1}-1\right)+\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{n}{n+1}\alpha+\frac{a}{2(n+1)}=\frac{n}{n+1}a^{-\frac{1}{n}}+\frac{a}{2(n+1)}$$

(2)　$f'(a)=\dfrac{n}{n+1}\cdot\left(-\dfrac{1}{n}\right)a^{-\frac{1}{n}-1}+\dfrac{1}{2(n+1)}=-\dfrac{1}{n+1}\left(a^{-\frac{n+1}{n}}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{a^{\frac{n+1}{n}}-2}{2a^{\frac{n+1}{n}}}$

$f'(a)=0$ とすると，$a^{\frac{n+1}{n}}=2$，$a=2^{\frac{n}{n+1}}$

a	1	$\cdots$	$2^{\frac{n}{n+1}}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

右表より，$a=2^{\frac{n}{n+1}}$ のとき $f(a)$ は最小値をとるので，

$$b_n=f\left(2^{\frac{n}{n+1}}\right)=\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{2(n+1)}\cdot 2^{\frac{n}{n+1}}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot 2^{-\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\cdot 2^{\frac{n}{n+1}-1}=\frac{n}{n+1}\cdot 2^{-\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\cdot 2^{-\frac{1}{n+1}}=2^{-\frac{1}{n+1}}$$

(3)　$c_m=b_m\cdot b_{m+1}\cdot\cdots\cdot b_{2m}=2^{-\frac{1}{m+1}}\cdot 2^{-\frac{1}{m+2}}\cdot\cdots\cdot 2^{-\frac{1}{2m+1}}=2^{-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m+1}\right)}$

ここで，$d_m=\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}+\cdots+\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{2m+1}$ とおくと，

$$d_m=\frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}\right)+\frac{1}{2m+1}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{k}{m}}+\frac{1}{2m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty}d_m=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2$$

したがって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}c_m=\lim_{m\to\infty}2^{-d_m}=2^{-\log 2}$

[解 説]

計算力の問われる問題です。$f'(a)$ の符号変化については，特に慎重さが要求されます。それに比べると，(3)での区分求積法を利用した極限計算は，簡単です。

4

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ に対して，ハミルトン・ケーリーの定理を適用すると，

$A^2+A+E=O$ （E は単位行列）

$(A-E)(A^2+A+E)=O$ より，$A^3-E=O$，$A^3=E$ となるので，

(i)　n が 3 で割り切れるとき　$A^n=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 のとき　$A^n=A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

(iii) n を 3 で割った余りが 2 のとき　$A^n=A^2=-A-E=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

(2)　$A^2B=BA$ より，$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$-a+c=b$ ……①，$-b+d=-a-b$ ……②

$-a=d$ ……③，$-b=-c-d$ ……④

②③より $d=-a$ となり, $a\geqq 0$, $d\geqq 0$ より $a=d=0$

①④より $c=b$ となるので，まとめると $B=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}$ である。

条件より，$B^2=E$ なので，$\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

これより $b^2=1$ となり, $b\geqq 0$ から $b=1$

以上より，$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

(3)　(1)より，$A^{25}=A^{3\times 8+1}=A$，$A^{1999}=A^{3\times 666+1}=A$

(2)より，$BA^2BA^{25}BA^{1999}=BA^2BABA=B\cdot BA\cdot ABA=B^2A^2BA$

$$=A^2BA=BA\cdot A=BA^2$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

[解　説]

(1)はノーヒントで A^n を求めるわけですから, A には特別な仕掛けがあるはずです。それは $A^3=E$ ということで，それさえわかれば，後は完答まで一直線です。