1　解答解説のページへ

k は $k>0$，$k\neq 1$ をみたし，θ は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ をみたす実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　座標平面上で，2 定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ からの距離の比が $1:k$ であるような点の軌跡は円になることを示し，その中心 $(X,\ Y)$ および半径 r を k と θ を用いて表せ。

(2)　θ は固定したままで，k のみを与えられた範囲で動かすとき，$(X,\ Y)$ のえがく軌跡を求めよ。

(3)　k，θ を与えられた範囲でともに動かすとき，$(X,\ Y)$ の存在する領域を図示せよ。

2

解答解説のページへ

行列 A を $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ で与える。実数 x, y と自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して，x_n，y_n を $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により定める。ただし，A^n は A の n 個の積である。

(1)　$A^n=\begin{pmatrix} 2^n & 3^n-2^n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ であることを示せ。

(2)　$0\leqq x<1$，$0\leqq y<1$ の範囲で，x_n-x と y_n-y がともに整数となるような x, y の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

$0<h<1$ とする。xy 平面上で，曲線 $y=e^{-x^2}$ と直線 $y=h$ とで囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$V(h)$ を求めよ。

(2)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対し，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを示せ。

(3)　$h=2^{-n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V(2^{-n})$ を求めよ。

4 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，不等式 $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ が成立することを示せ。

(2)　正の実数 x と自然数 $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対し，複素数 $1 + \dfrac{x}{n}i$ の偏角を θ_n $(0 \leqq \theta_n < 2\pi)$ とおくとき，$\lim\limits_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ。

(3)　(2)で与えた複素数の n 乗 $\left(1 + \dfrac{x}{n}i\right)^n$ の実部を a_n とおくとき，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。