$\boxed{1}$

解答解説のページへ

$a>0$ とし，曲線 $C_1: y=5x^2$ と曲線 $C_2: y=x^2+4a^2$ を考える。C_1 と C_2 の共有点のうち, x 座標が正のものを P とし, P における C_2 の接線を l とする。次の問いに答えよ。

(1) P の座標と l の方程式を求めよ。

(2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3) C_1 と l で囲まれた図形の面積を T とする。(2)で求めた S との比 $\dfrac{T}{S}$ を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　整数 n に対して，$x=7n$，$y=17(17-n)$ が不定方程式 $17x+7y=2023$ を満たすことを示せ。

(2)　$17x+7y=2023$ を満たす整数 $x,\ y$ は，整数 n を用いて $x=7n$，$y=17(17-n)$ と表されるものに限ることを示せ。

(3)　$17x+7y=2023$ を満たす整数 $x,\ y$ のうち，$|xy-2023|$ を最小にするものを求めよ。

3

解答解説のページへ

実数 a, b が，次の条件を満たすとする。

$(x,\ y)$ を座標とする座標平面において，不等式 $y \geqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 1)$ があり，不等式 $y \leqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{C}(-3,\ -1)$ と点 $\mathrm{D}(3,\ -1)$ がある。

次の問いに答えよ。

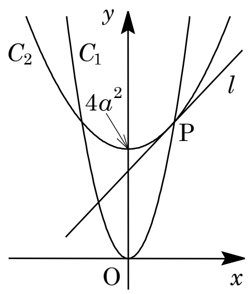
(1)　$b=0$ のとき，a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　与えられた条件を満たす $(a,\ b)$ 全体の集合を，$(a,\ b)$ を座標とする座標平面に図示せよ。

(3)　$(x,\ y)$ を座標とする座標平面上で，点 $\mathrm{P}(5,\ -2)$，点 $\mathrm{Q}(5,\ 3)$ を考える。このとき，直線 $y=ax+b$ は線分 PQ と必ず共有点をもつことを示せ。

1

問題のページへ



(1)　$C_1 : y = 5x^2$ ……①と $C_2 : y = x^2 + 4a^2$ ……②を連立し,

$$5x^2 = x^2 + 4a^2,\ \ x^2 = a^2$$

これより $x = \pm a$ となり，$a > 0$ から $\mathrm{P}(a,\ 5a^2)$

また，②から $y' = 2x$ となり，P における C_2 の接線 l は,

$$y - 5a^2 = 2a(x - a),\ \ y = 2ax + 3a^3 \cdots\cdots\cdots ③$$

(2)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_{-a}^{a} \{(x^2 + 4a^2) - 5x^2\}dx = \int_{-a}^{a} (-4x^2 + 4a^2)dx$$

$$= -4\int_{-a}^{a} (x + a)(x - a)dx = \frac{4}{6}(a + a)^3 = \frac{16}{3}a^3$$

(3)　①③を連立すると，$5x^2 = 2ax + 3a^2$ より $5x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ となり,

$$(x - a)(5x + 3a) = 0$$

これより C_1 と l の共有点の x 座標は $x = a,\ -\dfrac{3}{5}a$ となり，C_1 と l で囲まれた図形の面積 T は,

$$T = \int_{-\frac{3}{5}a}^{a} \{(2ax + 3a^2) - 5x^2\}dx = -\int_{-\frac{3}{5}a}^{a} (5x^2 - 2ax - 3a^2)dx$$

$$= -5\int_{-\frac{3}{5}a}^{a} (x - a)\left(x + \frac{3}{5}a\right)dx = \frac{5}{6}\left(a + \frac{3}{5}a\right)^3 = \frac{256}{75}a^3$$

よって，$\dfrac{T}{S} = \dfrac{256a^3}{75}\cdot\dfrac{3}{16a^3} = \dfrac{16}{25}$ となる。

［解　説］

定積分と面積についての基本題です。複雑な計算もありません。もっとも，解答例では公式を使いましたが。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　整数 n に対し，$x=7n$，$y=17(17-n)$ のとき，

$$17x+7y=17\cdot 7n+7\cdot 17(17-n)=7\cdot 17^2=2023$$

(2)　$17x+7y=2023$ に対し，$17x+7y=7\cdot 17^2$ から，$17x=7(17^2-y)$

ここで，7 と 17 は互いに素なので，整数 n を用いて，

$$x=7n,\ 17^2-y=17n$$

よって，$x=7n$，$y=17(17-n)$ と表される。

(3)　(2)より，$|xy-2023|=|7\cdot 17n(17-n)-7\cdot 17^2|=7\cdot 17|n^2-17n+17|$

さて，$f(x)=x^2-17x+17$ とおき，$f(x)=0$ の解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，

$$\alpha=\frac{17-\sqrt{221}}{2},\ \beta=\frac{17+\sqrt{221}}{2}$$

ここで，$14<\sqrt{221}<15$ より，$1<\alpha<\frac{3}{2}$，$\frac{31}{2}<\beta<16$ となり，

$$f(1)=f(16)=1,\ f(2)=f(15)=-13$$

すると，$|1|<|-13|$ であるので，$|n^2-17n+17|$ は $n=1$ または $n=16$ のとき最小値 1 をとる。これより，$|xy-2023|$ が最小になる $(x,\ y)$ は，

$$(x,\ y)=\big(7\cdot 1,\ 17\cdot(17-1)\big),\ \big(7\cdot 16,\ 17\cdot(17-16)\big)$$

すなわち，$(x,\ y)=(7,\ 272),\ (112,\ 17)$ である。

［解　説］

誘導つきの不定方程式の問題です。ただ，(3)は詰めが面倒です。記述は省きましたが，$y=f(x)$ のグラフが $x=\frac{17}{2}$ について対称であることに着目しています。

3

問題のページへ

(1) 不等式 $y \geqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 1)$ があるので，

$1 \geqq -a+b$ ………①，$1 \geqq a+b$ ………②

不等式 $y \leqq ax+b$ が表す領域に点 $\mathrm{C}(-3,\ -1)$ と点 $\mathrm{D}(3,\ -1)$ があるので，

$-1 \leqq -3a+b$ ………③，$-1 \leqq 3a+b$ ………④

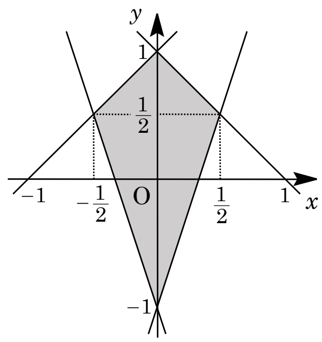
さて，$b=0$ のとき，①～④から $1 \geqq -a$ かつ $1 \geqq a$ かつ $-1 \leqq -3a$ かつ $-1 \leqq 3a$ となり，変形すると，$a \geqq -1$ かつ $a \leqq 1$ かつ $a \leqq \dfrac{1}{3}$ かつ $a \geqq -\dfrac{1}{3}$ から，

$-\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}$

(2) ①～④より，$b \leqq a+1$ かつ $b \leqq -a+1$ かつ $b \geqq 3a-1$ かつ $b \geqq -3a-1$

ここで，境界線 $b=a+1$ と $b=-3a-1$ の交点は $(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，また $b=-a+1$ と $b=3a-1$ の交点は $(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

これより，①～④を満たす $(a,\ b)$ 全体の集合は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(3) 2 点 $\mathrm{P}(5,\ -2)$，$\mathrm{Q}(5,\ 3)$ に対して，線分 PQ は，

$x=5 \quad (-2 \leqq y \leqq 3)$

ここで，$y=ax+b$ と $x=5$ を連立すると $y=5a+b$ となり，$(a,\ b)$ が①～④を満たすとき $5a+b$ のとりうる値の範囲は，ab 平面上で直線 $b=-5a+y$ ……⑤と(2)の網点部が共有点をもつ y の範囲として得られる。

直線⑤は傾きが -5 の直線群を表し，$(a,\ b)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき $y=3$，$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき $y=-2$ であることから，図より y の範囲は $-2 \leqq y \leqq 3$ となる。したがって，直線 $y=ax+b$ は線分 PQ と必ず共有点をもつ。

［解　説］

領域と最大・最小の問題です。(3)は線分 PQ が y 軸に平行なことから，共有点の y 座標の範囲で示しました。なお，正領域と負領域の考え方を用いる方法もあります。