1　解答解説のページへ

関数 $f(x)=-x^3+3x^2+x-3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ を解け。

(2)　$y=f(x)$ の接線で傾きが 1 であるものを，すべて求めよ。

(3)　(2)で求めた接線のうち，y 切片が正のものを l とする。x 軸，y 軸，$y=f(x)$ および l で囲まれる図形の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

平面上の△OAB で，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=1$ となるものを考え，点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA の交点を H とする。また t を実数とし，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ となる点 P をとる。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) H は辺 OA の中点であることを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

以下において，P は△OAB の外接円の中心であるとする。

(3) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2=x$ とするとき，t を x を用いて表せ。

(4) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|=\sqrt{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ を満たすとき，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

m は自然数とする。数列 $\{a_n\}$ を初項から順に，第 m 群が連続した $12m-6$ 個の項からなるように群を分ける。第 m 群の最後の項は数列 $\{a_n\}$ の第 t_m 項であるとする。次の問いに答えよ。

(1) 第 2 群の最初の項と最後の項は，数列 $\{a_n\}$ のそれぞれ何番目の項か。

(2) t_m を m を用いて表せ。

(3) a_{2022} が第 k 群に含まれるとき，k を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を，初項が整数 c で公差が 1 の等差数列とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{t_m} a_n = 48$ を満たす c と m を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 3$ に対し，$f(x) = 0$ より，

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0,\ (x+1)(x-1)(x-3) = 0$$

よって，$f(x) = 0$ の解は，$x = -1,\ 1,\ 3$ である。

(2)　$f'(x) = -3x^2 + 6x + 1$ より，$f'(x) = 1$ とおくと $-3x^2 + 6x = 0$ から，$x = 0,\ 2$

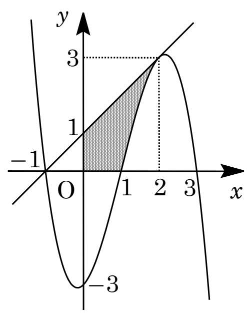
(i)　$x = 0$ のとき　$f(0) = -3$ から，点 $(0,\ -3)$ における接線の方程式は，

$$y + 3 = 1\cdot x,\ y = x - 3$$

(ii)　$x = 2$ のとき　$f(2) = 3$ から，点 $(2,\ 3)$ における接線の方程式は，

$$y - 3 = 1\cdot(x - 2),\ y = x + 1$$

(3)　接線 $l : y = x + 1$ となるので，x 軸，y 軸，$y = f(x)$ および l で囲まれる図形の面積 S は，



$$S = \frac{1}{2}(1+3)\cdot 2 - \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 + x - 3)\,dx$$

$$= 4 - \Big[-\frac{x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x\Big]_1^2$$

$$= 4 + \frac{15}{4} - 7 - \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{4}$$

［解　説］

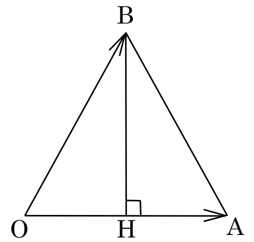
微積分の基本題です。気持ちよく完答したいものです。

© 電送数学舎 2022

2

問題のページへ

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とするとき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$



ここで，点 B から直線 OA に下ろした垂線と OA との交点 H に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}$ (k は実数)とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=0$から，

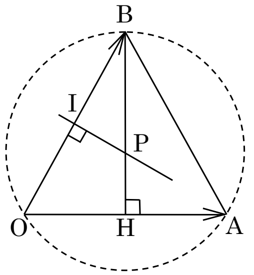
$$\vec{a}\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=0,\ k\cdot2-1=0,\ k=\frac{1}{2}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}\vec{a}$から H は辺 OA の中点である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BH}}$より$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$となり，(1)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{b}=t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　(1)から△OAB は二等辺三角形であり，△OAB の外心 P は，直線 BH と辺 OB の垂直二等分線の交点になる。



ここで，OB の中点を I とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{IP}}=0$から，

$$\vec{b}\cdot\left\{\frac{t}{2}\vec{a}+(1-t)\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}\right\}=0,\ \vec{b}\cdot\left\{\frac{t}{2}\vec{a}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\vec{b}\right\}=0$$

$|\vec{b}|^2=x$から$\frac{t}{2}\cdot1+\left(\frac{1}{2}-t\right)x=0$となり，$t+(1-2t)x=0$

すると，$(2x-1)t=x$ となり，$2x-1=0$ のときは成り立たないので，$2x-1\neq0$ $\left(x\neq\frac{1}{2}\right)$のもとで，$t=\frac{x}{2x-1}\cdots\cdots②$である。

(4)　①②より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{x}{2(2x-1)}\vec{a}+\left(1-\frac{x}{2x-1}\right)\vec{b}=\frac{1}{2(2x-1)}\{x\vec{a}+2(x-1)\vec{b}\}$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$より$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$となり，

$$\frac{1}{4(2x-1)^2}\{x^2\cdot2+4x(x-1)\cdot1+4(x-1)^2x\}=2x$$

$x>0$かつ$x\neq\frac{1}{2}$より，$2x+4(x-1)+4(x-1)^2=8(2x-1)^2$となり，

$$4x^2-2x=8(2x-1)^2,\ 2x=8(2x-1),\ 14x=8$$

よって，$x=\frac{4}{7}$となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{x}=\sqrt{\frac{4}{7}}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用問題です。図形的な処理も可能ですが，解答例では計算で押し通しました。

© 電送数学舎 2022

3

問題のページへ

(1)　数列$\{a_n\}$を第 m 群の項数が$12m-6$の群に分けると，第 1 群は$12\cdot 1-6=6$項，第2群は$12\cdot 2-6=18$項よりなる。

すると，第2群の最初の項は数列$\{a_n\}$の$6+1=7$番目，第2群の最後の項は数列$\{a_n\}$の$6+18=24$番目となる。

(2)　t_mは第m群の最後の項までの項数なので，

$$t_m=\sum_{k=1}^{m}(12k-6)=6\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=6\cdot\frac{1+(2m-1)}{2}\cdot m=6m^2$$

(3)　a_{2022}が第k群に含まれるとき，$6(k-1)^2<2022\leqq 6k^2$より$(k-1)^2<337\leqq k^2$

ここで，$18^2=324$，$19^2=361$から，$k=19$である。

(4)　数列$\{a_n\}$は初項cで公差1の等差数列より，$a_n=c+(n-1)=n+c-1$となり，

$$\sum_{n=1}^{t_m}a_n=\sum_{n=1}^{6m^2}(n+c-1)=\frac{c+(6m^2+c-1)}{2}\cdot 6m^2=3m^2(6m^2+2c-1)$$

条件より，$3m^2(6m^2+2c-1)=48$となり，$m^2(6m^2+2c-1)=16$ ………$(*)$

ここで，cは整数なので$6m^2+2c-1$は奇数で，m^2は16の約数となる。

(i)　$m^2=1$ $(m=1)$のとき　$(*)$より$6m^2+2c-1=16$となり不適である。

(ii)　$m^2=4$ $(m=2)$のとき　$(*)$より$6m^2+2c-1=4$となり不適である。

(iii)　$m^2=16$ $(m=4)$のとき　$(*)$より$6m^2+2c-1=1$となり，$96+2c=2$

これより，$c=-47$となり適する。

(i)〜(iii)より，$c=-47$，$m=4$である。

［解 説］

群数列の基本的な問題です。(2)と(4)のシグマ計算は等差数列の和の公式を利用しています。なお，(4)の場合分けは「奇数」に注目すると不要でした。

© 電送数学舎 2022