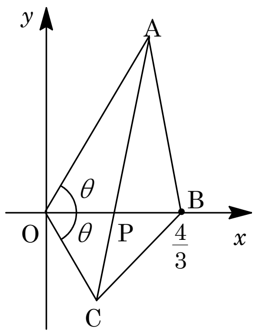
1

問題のページへ



(1)　2 点 $A(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$C(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，

$$\overrightarrow{CA}=(\cos\theta,\ 3\sin\theta)$$

直線 AC は，法線ベクトルの成分を $(3\sin\theta,\ -\cos\theta)$ とおくことができるので，その方程式は，

$$3\sin\theta(x-\cos\theta)-\cos\theta(y+\sin\theta)=0$$

$$3x\sin\theta-y\cos\theta-4\sin\theta\cos\theta=0$$

x 軸の交点 P は，$0<\theta<\pi$ より，$x=\dfrac{4\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta}=\dfrac{4}{3}\cos\theta$

よって，$P\left(\dfrac{4}{3}\cos\theta,\ 0\right)$である。

(2)　$BP=\dfrac{4}{3}(1-\cos\theta)$ より，$\triangle ABC$ の面積 $S(\theta)$ は，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}(1-\cos\theta)(2\sin\theta+\sin\theta)=2\sin\theta(1-\cos\theta)$$

(3)　$S'(\theta)=2\cos\theta(1-\cos\theta)+2\sin^2\theta$

$$=2(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)$$

$S(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$S(\theta)$ は最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	

[解 説]

微分法を用いた最大・最小問題ですが，誘導が細かいため，計算だけを注意深く実行すれば結論に到達できます。

2

問題のページへ

(1) $P=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ より，$P^{-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$ となり，

$$B=P^{-1}AP=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}2+\sqrt{3} & 3+2\sqrt{3}\\ -2+\sqrt{3} & -3+2\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}6+4\sqrt{3} & 0\\ 0 & -6+4\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2+\sqrt{3} & 0\\ 0 & 2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

(2) $A=PBP^{-1}$ より，$A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$ となり，

$$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=PB^nP^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=2PB^nP^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n & 0\\ 0 & (2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ -1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n & 0\\ 0 & (2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(2+\sqrt{3})^n\\ -(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}\sqrt{3}(2+\sqrt{3})^n+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n\\ (2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\end{pmatrix}$$

よって，$a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$，$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n\}$

(3) $0<2-\sqrt{3}<1$ より，$a_n-1<a_n-(2-\sqrt{3})^n<a_n$ となる。

すると，a_n は明らかに整数なので, (2)より，

$$[(2+\sqrt{3})^n]=[a_n-(2-\sqrt{3})^n]=a_n-1$$

また，$c_n=(2+\sqrt{3})^n-[(2+\sqrt{3})^n]=a_n-(2-\sqrt{3})^n-(a_n-1)=1-(2-\sqrt{3})^n$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\{1-(2-\sqrt{3})^n\}=1$

[解 説]

行列の n 乗についての有名問題です。ただ, (2)の設問では，A^n を求める必要はありません。

3

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ のとき $t = \dfrac{x}{2} \geqq 0$ となり，$f(t) = \dfrac{t^2}{2} - 1 + \cos t$ とおくと，$f'(t) = t - \sin t \geqq 0$

よって，$f(t) \geqq f(0) = 0$ となり，$\dfrac{t^2}{2} \geqq 1 - \cos t$ から，$1 - \cos\dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{x^2}{8}$

(2)　$I_1 = \displaystyle\int_0^2 xe^x\,dx = \Big[\,xe^x\,\Big]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1$

また，$n \geqq 2$ で，$I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx = \Big[\,x^n e^x\,\Big]_0^2 - \int_0^2 nx^{n-1}e^x\,dx = 2^n e^2 - nI_{n-1}$

(3)　(2)より，$I_2 = 2^2 e^2 - 2I_1 = 4e^2 - 2(e^2 + 1) = 2(e^2 - 1)$

$I_3 = 2^3 e^2 - 3I_2 = 8e^2 - 6(e^2 - 1) = 2(e^2 + 3)$

$I_4 = 2^4 e^2 - 4I_3 = 16e^2 - 8(e^2 + 3) = 8(e^2 - 3)$

$I_5 = 2^5 e^2 - 5I_4 = 32e^2 - 40(e^2 - 3) = -8(e^2 - 15)$

(4)　$I = \displaystyle\int_0^4 \Big(1 - \cos\frac{x}{2}\Big)e^{\sqrt{x}}\,dx$ とすると, (1)より，$I \leqq \displaystyle\int_0^4 \frac{x^2}{8}e^{\sqrt{x}}\,dx$ ………①

ここで，$\sqrt{x} = u$ とおくと $dx = 2u\,du$ となり，

$$\int_0^4 \frac{x^2}{8}e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 \frac{u^4}{8}e^u \cdot 2u\,du = \frac{1}{4}\int_0^2 u^5 e^u du = \frac{1}{4}I_5 = -2e^2 + 30 \cdots\cdots ②$$

①②より，$\displaystyle\int_0^4 \Big(1 - \cos\frac{x}{2}\Big)e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq -2e^2 + 30$

[解 説]

構えたくなる問題ですが，あまりにも誘導が丁寧すぎて，(4)では肩透かしを食らったような気分になってしまいます。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1) まず，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\left[\log x\right]_n^{n+1}=\log(n+1)-\log n$

ここで，自然数 n に対し，$n\leqq x\leqq n+1$ のとき，$\dfrac{1}{n+1}\leqq\dfrac{1}{x}\leqq\dfrac{1}{n}$ となり，

$$\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}\int_n^{n+1}dx\ ,\ \ \frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

(2) 2 以上の自然数 n に対して, (1)より,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\left\{\log(k+1)-\log k\right\}=\log(n+1)-\log 1=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\log(k+1)-\log k\right\}=\log n-\log 1=\log n\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺に 1 を加えると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

(3) (2)より, 2 以上の自然数 n に対して，③より,

$$ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{n}}=e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}<e^{1+\log n}=en$$

さらに，①を適用して,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ek}=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\frac{1}{e}\log(n+1)$$

[解 説]

有名問題です。ただ，第 3 問と同じく，丁寧すぎる誘導がついています。