1

解答解説のページへ

座標平面上に点 $\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{B}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ がある。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 AC と x 軸の交点を P とする。P の座標を θ で表せ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) 面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{3}\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ に対して，$B=P^{-1}AP$ とおく。また，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，a_n，b_n を，$\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}$で定める。次の問いに答えよ。

(1)　P^{-1} および B を求めよ。

(2)　a_n，b_n を求めよ。

(3)　実数 x を超えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。このとき，$[\,(2+\sqrt{3})^n\,]=a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。また，$c_n=(2+\sqrt{3})^n-[\,(2+\sqrt{3})^n\,]$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $1-\cos\dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{x^2}{8}$ を示せ。

(2)　$I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^x \, dx$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。I_1 の値を求めよ。さらに，等式 $I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1}$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ。

(3)　I_2，I_3，I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4)　不等式 $\displaystyle\int_0^4 \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}} \, dx \leqq -2e^2+30$ を示せ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ を求めよ。また，$\dfrac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\dfrac{1}{n}$ を示せ。

(2)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ を示せ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。