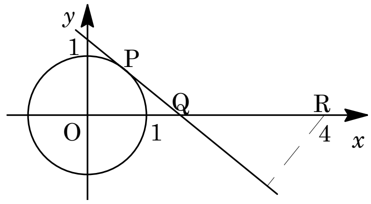
1

問題のページへ



(1)　円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 l は,

$$ax+by=1\cdots\cdots\cdots①$$

ただし, $a^2+b^2=1\cdots\cdots②$ である。

さて, $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 から, ①より,

$$\frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2,\ |4a-1|=2\sqrt{a^2+b^2}$$

②より, $|4a-1|=2$ となり, $4a-1=\pm2$, $a=\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{4}$

すると, $0<b<1$ から, $a=\dfrac{3}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $a=-\dfrac{1}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって, 点 P の座標は, $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ または $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ である。

(2)　$\mathrm{P}(a,\ b)$ のとき, ①より $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$ となり, ②から,

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+b^2}=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}+1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$$

(i)　$a=\dfrac{3}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{\dfrac{16}{9}-1}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(ii)　$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$

[解 説]

円と直線に関する基本題です。計算に複雑なところもありません。

2

問題のページへ

(1) 球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ が, 2 点 $(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$, $(1,\ 0,\ -1)$ を通ることより,

$$5+5=r^2 \cdots\cdots\cdots ①,\quad 1+(-1-a)^2=r^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より, $r=\sqrt{10}$ となり, ②に代入すると, $(-1-a)^2=9$

$a>0$ より, $a=2$

(2) (1)より, $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{B}(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ 2)$, $\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ に対し,

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ 0),\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos t,\ \sin t,\ -3),\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t$$

(3) △ABP の面積 S は, (2)より,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(5+5)(\cos^2 t+\sin^2 t+9)-5(\cos t+\sin t)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{100-5(1+2\sin t\cos t)}=\frac{1}{2}\sqrt{95-5\sin 2t}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ から, $\sin 2t=1$ $\left(t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right)$ のとき, S は最小値 $\frac{\sqrt{90}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$ をとる。

[解 説]

単に空間ベクトルの計算問題です。球面の方程式は形式的なものにすぎません。

3

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}0 & -r\\ -r & 0\end{pmatrix}=r\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$より，$A^2=r^2\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=r^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

これより，帰納的に，$A^{2k}=r^{2k}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$A^{2k+1}=r^{2k+1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

(2)　(i)　nが偶数のとき

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$$

よって，$x_n=-r^n$，$y_n=2r^n$

(ii)　nが奇数のとき

$$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}=r^n\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}\quad(n\geqq 3)$$

よって，$x_n=-2r^n$，$y_n=r^n$

なお，$\mathrm{P}_1(-2r,\ r)$より，この式は$n=1$のときも成立する。

(3)　まず，$d_1=\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1=\sqrt{(-2r+1)^2+(r-2)^2}=\sqrt{5r^2-8r+5}$

さて, nが偶数のとき，$\mathrm{P}_n(-r^n,\ 2r^n)$，$\mathrm{P}_{n-1}(-2r^{n-1},\ r^{n-1})$より，

$$d_n=\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{(-r^n+2r^{n-1})^2+(2r^n-r^{n-1})^2}$$
$$=r^{n-1}\sqrt{(-r+2)^2+(2r-1)^2}=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$$

また, nが奇数のとき，$\mathrm{P}_n(-2r^n,\ r^n)$，$\mathrm{P}_{n-1}(-r^{n-1},\ 2r^{n-1})$より，

$$d_n=\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{(-2r^n+r^{n-1})^2+(r^n-2r^{n-1})^2}$$
$$=r^{n-1}\sqrt{(-2r+1)^2+(r-2)^2}=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$$

よって, nの偶奇にかかわらず，$d_n=r^{n-1}\sqrt{5r^2-8r+5}$

ここで，初項d_1，公比rの無限等比級数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}d_n$が収束し，和が3となる条件は,

$$0<r<1\cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{\sqrt{5r^2-8r+5}}{1-r}=3\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$\sqrt{5r^2-8r+5}=3(1-r)$，$5r^2-8r+5=9(1-r)^2$となり，

$$2r^2-5r+2=0,\ (r-2)(2r-1)=0$$

①から，$r=\dfrac{1}{2}$である。

[解 説]

Aの表す1次変換は，直線$y=-x$に関して折り返し，r倍の相似拡大を行う相似変換です。このことを，もう少し前面に出す解答例も可能です。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)=2a\log x-(\log x)^2$ に対し，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点は,

$$(2a-\log x)(\log x)=0,\ \log x=0,\ 2a$$

よって，$x=1,\ e^{2a}$ となり，交点の x 座標 x_1，x_2 は，$x_1=1$，$x_2=e^{2a}$

また，$f'(x)=\dfrac{2a}{x}-\dfrac{2\log x}{x}=\dfrac{2(a-\log x)}{x}$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=e^a$ のとき $f(x)$ は最大となる。その値は,

$$f(e^a)=2a\cdot a-a^2=a^2$$

x	0	$\cdots$	e^a	$\cdots$
$f'(x)$		＋	0	－
$f(x)$		↗		↘

(2)　$\mathrm{P}_1(1,\ 0)$ における接線 l_1 は，$f'(1)=2a$ より，$y=2a(x-1)$ ………①

また，$\mathrm{P}_2(e^{2a},\ 0)$ における接線 l_2 は，$f'(e^{2a})=-2ae^{-2a}$ より,

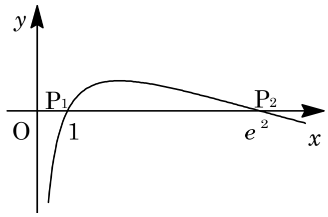
$$y=-2ae^{-2a}(x-e^{2a})=-2ae^{-2a}x+2a \text{ ………②}$$

①②を連立すると，$2a(x-1)=-2ae^{-2a}x+2a$ より，$x-1=-e^{-2a}x+1$

$$(1+e^{-2a})x=2,\ x=\frac{2}{1+e^{-2a}}$$

よって，$X(a)=\dfrac{2}{1+e^{-2a}}$ から，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}X(a)=2$

(3)　$a=1$ のとき，$f(x)=2\log x-(\log x)^2$，$\mathrm{P}_1(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(e^2,\ 0)$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S は,



$$S=\int_1^{e^2}\{2\log x-(\log x)^2\}dx$$

ここで，$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$ より,

$$S=\int_0^2(2t-t^2)e^t dt=\Big[(2t-t^2)e^t\Big]_0^2-\int_0^2 2(1-t)e^t dt$$

$$=-2\Big[(1-t)e^t\Big]_0^2+2\int_0^2 -e^t dt=-2(-e^2-1)-2\Big[e^t\Big]_0^2$$

$$=2e^2+2-2(e^2-1)=4$$

[解 説]

微積分総合の基本問題です。捻りはまったくありません。