

1

問題のページへ

$$(1) \text{ 条件より, } \sum_{k=1}^n x_k = 4y_n - \alpha \dots\dots, \quad \sum_{k=1}^n y_k = 9x_n - \beta \dots\dots$$

に $n=1$ を代入すると, $x_1 = 4y_1 - \alpha \dots\dots$, $y_1 = 9x_1 - \beta \dots\dots$

$$\text{より, } x_1 = 4(9x_1 - \beta) - \alpha \text{ となり, } x_1 = \frac{\alpha + 4\beta}{35}$$

$$y_1 = 9 \cdot \frac{\alpha + 4\beta}{35} - \beta = \frac{9\alpha + \beta}{35}$$

$$(2) \text{ より, } \sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^n x_k = (4y_{n+1} - \alpha) - (4y_n - \alpha) \text{ となり,}$$

$$x_{n+1} = 4y_{n+1} - 4y_n \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } \sum_{k=1}^{n+1} y_k - \sum_{k=1}^n y_k = (9x_{n+1} - \beta) - (9x_n - \beta) \text{ となり,}$$

$$y_{n+1} = 9x_{n+1} - 9x_n \dots\dots\dots$$

$$\text{より, } x_{n+1} = 4(9x_{n+1} - 9x_n) - 4y_n, \quad x_{n+1} = \frac{1}{35}(36x_n + 4y_n)$$

$$y_{n+1} = \frac{9}{35}(36x_n + 4y_n) - 9x_n = \frac{1}{35}(9x_n + 36y_n)$$

$$\text{よって, } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ から, } A = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}$$

$$(3) \alpha = 14, \beta = -21 \text{ のとき, (1)より, } x_1 = \frac{14 - 84}{35} = -2, \quad y_1 = \frac{126 - 21}{35} = 3 \text{ となり,}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{35} \begin{pmatrix} -60 \\ 90 \end{pmatrix} = \frac{6}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

すると, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と推測でき, これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき 明らかに成立する。

(ii) $n=k$ のとき 成立を仮定すると,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{6}{7} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^k \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって, $n=k+1$ のときも成立する。

$$(i)(ii)\text{より, } x_n = -2 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}, \quad y_n = 3 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$$

[解 説]

漸化式の典型題の 1 つで, x_2, y_2 を導くプロセスから一般項を推測するタイプです。明らかでも, 数学的帰納法による証明は書いておくべきでしょう。

2

問題のページへ

- (1) $s = -t$ とおくと, $\frac{ds}{dt} = -1$ であり, $t = -1 \rightarrow 0$ のとき $s = 1 \rightarrow 0$ となる。

また, $f(t)$ は区間 $[-1, 1]$ で連続で, $f(-t) = f(t)$ が成り立つので,

$$\int_{-1}^0 f(t) dt = \int_1^0 f(-s)(-ds) = \int_0^1 f(-s) ds = \int_0^1 f(s) ds = \int_0^1 f(t) dt$$

- (2) $-1 \leq x \leq 1$ のとき, 条件より,

$$F(x) = -\int_{-1}^1 |t-x| f(t) dt = -\int_{-1}^x -(t-x) f(t) dt - \int_x^1 (t-x) f(t) dt$$

$$= \int_{-1}^x t f(t) dt - x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_x^1 t f(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt$$

$$F'(x) = x f(x) - \int_{-1}^x f(t) dt - x f(x) + x f(x) + \int_x^1 f(t) dt - x f(x)$$

$$= -\int_{-1}^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt$$

$$F''(x) = -f(x) - f(x) = -2f(x)$$

- (3) 条件より, $f'(x) = -\int_{-1}^x f(t) dt + \int_x^1 f(t) dt \dots\dots$, $f''(x) = -2f(x) \dots\dots$

さて, $g(x) = f(x) - f(0) \cos \sqrt{2}x$ に対して,

$$g'(x) = f'(x) + \sqrt{2}f(0) \sin \sqrt{2}x, \quad g''(x) = f''(x) + 2f(0) \cos \sqrt{2}x$$

すると, $g(0) = f(0) - f(0) \cos 0 = 0$, $g'(0) = f'(0) + \sqrt{2}f(0) \sin 0 = f'(0)$

(1) と から, $f'(0) = -\int_{-1}^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt = 0$ となり, $g'(0) = 0$

さらに, $G(x) = \frac{1}{2} \{g'(x)\}^2 + g(x)^2$ とおき, を利用すると,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{1}{2} \{g'(x)\}^2 + g(x)^2 \right)' = g'(x)g''(x) + 2g(x)g'(x) \\ &= g'(x) \{f''(x) + 2f(0) \cos \sqrt{2}x + 2f(x) - 2f(0) \cos \sqrt{2}x\} \\ &= g'(x) \{f''(x) + 2f(x)\} = 0 \dots\dots\dots \end{aligned}$$

より, C を定数として, $G'(x) = C$, $\frac{1}{2} \{g'(x)\}^2 + g(x)^2 = C$

さらに, $g(0) = g'(0) = 0$ から, $C = 0$ となり,

$$\frac{1}{2} \{g'(x)\}^2 + g(x)^2 = 0$$

そこで, $\{g'(x)\}^2 = 0$, $g(x)^2 = 0$ から, $g'(x) = g(x) = 0$ となり,

$$f(x) - f(0) \cos \sqrt{2}x = 0, \quad f(x) = f(0) \cos \sqrt{2}x$$

[解 説]

ていねいな誘導つきの微分方程式の解を求める問題です。

3

問題のページへ

(1) $A'(x_1, y_1), B'(x_2, y_2), \angle A'OB = \theta$ とおくと、

$$x_1 = -r \tan \theta = -rt, \quad y_1 = r$$

$$x_2 = 1, \quad y_2 = -\tan \theta = -t$$

よって、 $A'(-rt, r), B'(1, -t)$

(2) $\overrightarrow{AA'} = (-rt-2, r)$ より、直線 AA' の法線ベクトルの成分を $(r, rt+2)$ 、 $\overrightarrow{BB'} = (1, -2r-t)$ より、直線 BB' の法線ベクトルの成分を $(2r+t, 1)$ とすることができる。

これより、直線 AA', BB' の方程式は、

$$AA' : r(x-2) + (rt+2)y = 0, \quad rx + (rt+2)y = 2r \dots\dots\dots$$

$$BB' : (2r+t)x + (y-2r) = 0, \quad (2r+t)x + y = 2r \dots\dots\dots$$

(3) 2 直線 AA' と BB' の交点が $M(x_0, y_0)$ より、 から、

$$rx_0 + (rt+2)y_0 = 2r \dots\dots\dots, \quad (2r+t)x_0 + y_0 = 2r \dots\dots\dots$$

より、 $(-r-t)x_0 + (rt+1)y_0 = 0, (r+t)x_0 = (rt+1)y_0$ となり、

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{r+t}{rt+1}$$

(4) まず、辺 AB の中点を C とすると $C(1, r)$ となり、 $AC = \sqrt{1+r^2}$ から、

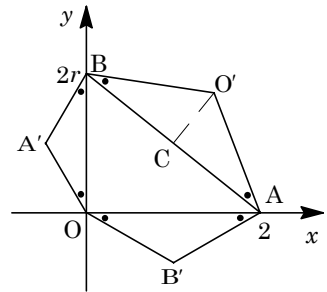
$$CO' = AC \tan \theta = t \sqrt{1+r^2}$$

また、 $\overrightarrow{AB} = -2(1, -r)$ より、直線 AB の法線ベクトルの成分を $(r, 1)$ とすることができるので、

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CO'} = (1, r) + t \sqrt{1+r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r, 1) = (rt+1, r+t)$$

これより、 $O'(rt+1, r+t)$ となり、直線 OO' の方程式は $y = \frac{r+t}{rt+1}x$ である。

よって、(3)から、直線 OO' 上に 2 直線 AA' と BB' の交点 $M(x_0, y_0)$ が存在することになる。すなわち、3 直線 AA', BB', OO' は 1 点で交わる。



[解 説]

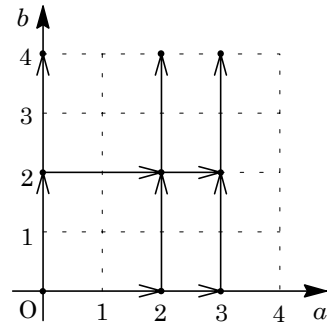
座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって、計算量を減らすことがポイントです。

4

問題のページへ

- (1) A の得点を a , B の得点を b とするとき, B が勝つ場合の点 (a, b) の推移には 5 つのルートがある。

- (0, 0) (0, 2) (0, 4)
- (0, 0) (0, 2) (2, 2) (2, 4)
- (0, 0) (0, 2) (3, 2) (3, 4)
- (0, 0) (2, 0) (2, 2) (2, 4)
- (0, 0) (3, 0) (3, 2) (3, 4)



また, a 軸方向に 2 または 3 進む確率は $\frac{1}{3}$, b 軸方

向に 2 だけ進む確率は $\frac{1}{3}$, さらに動かない確率は $\frac{1}{3}$ である。

さて, 1 回目の試行で B が勝つ場合はないので, $p_1 = 0$ である。

2 回目の試行で B が勝つ場合はルート のみより, $p_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ である。

3 回目の試行で B が勝つ場合, その確率は, ルート では $2! \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$, ルート ~ では $2! \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$ となるので, $p_3 = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{4}{27}$ である。

4 回目の試行で B が勝つ場合, その確率は, ルート では $3! \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$, ルート ~ では $3! \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$ となるので, $p_4 = \frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{1}{9}$ である。

また, n 回目 ($n \geq 3$) の試行で B が勝つ場合, その確率は,

(i) ルート のとき $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \times \frac{1}{3} = (n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(ii) ルート ~ のとき $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3} \times \frac{1}{3} = (n-1)(n-2) \left(\frac{1}{3}\right)^n$

(i)(ii)より, $p_n = (n-1) \left(\frac{1}{3}\right)^n + (n-1)(n-2) \left(\frac{1}{3}\right)^n = (n-1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n$

なお, この値は, $n=1, 2$ のときも満たされている。

- (2) 条件から, $q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n \dots\dots$ より,

$$\begin{aligned} q_n &= 9(n+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+2} - 6n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + (n-1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2n^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + (n-1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

よって, $\sum_{n=1}^k q_n = \frac{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k \right\}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k \dots\dots\dots$

また, において, $n=1$ から $n=k$ まで和をとると,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^k q_n &= 9 \sum_{n=1}^k p_{n+2} - 6 \sum_{n=1}^k p_{n+1} + \sum_{n=1}^k p_n \\ &= 9 \left(\sum_{n=1}^k p_n - p_1 - p_2 + p_{k+1} + p_{k+2} \right) - 6 \left(\sum_{n=1}^k p_n - p_1 + p_{k+1} \right) + \sum_{n=1}^k p_n \\ &= 4 \sum_{n=1}^k p_n - 3p_1 - 9p_2 + 3p_{k+1} + 9p_{k+2} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{よ} \text{り, } 4 \sum_{n=1}^k p_n &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3p_1 + 9p_2 - 3p_{k+1} - 9p_{k+2} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3 \times 0 + 9 \times \frac{1}{9} - 3k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} - 9(k+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{k+2} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k + 1 - k^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k - (k+1)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^k = 2 - 2(k^2 + k + 1) \left(\frac{1}{3}\right)^k\end{aligned}$$

$$\text{よ} \text{つ} \text{て, } \sum_{n=1}^k p_n = \frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$(3) \text{ (2)より, } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2}{3^k} = 0 \text{ を用いて, } a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{k^2 + k + 1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^k \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\text{こ} \text{の} \text{と} \text{き, } \left| \sum_{n=1}^k p_n - a \right| = \frac{k^2 + k + 1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ より,}$$

$$\frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^k p_n - a \right| = \frac{1}{k} \left(\log \frac{k^2 + k + 1}{2} - k \log 3 \right) = \frac{\log(k^2 + k + 1)}{k} - \frac{\log 2}{k} - \log 3$$

$$\text{こ} \text{こ} \text{で, } \frac{2 \log k}{k} = \frac{\log k^2}{k} < \frac{\log(k^2 + k + 1)}{k} < \frac{\log(k+1)^2}{k} = \frac{2 \log(k+1)}{k+1} \cdot \frac{k+1}{k} \text{ から,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0 \text{ を用いると, } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(k^2 + k + 1)}{k} = 0 \text{ となり,}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \log \left| \sum_{n=1}^k p_n - a \right| = -\log 3$$

[解 説]

(1)は確率の問題ですが、(2)以降は数列の計算問題です。たくさんの方が詰まっております、計算量も半端ではありません。なお、(1)で5つのルートを個別に計算していくと、B5用紙2枚では収まりません。