$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

α と β は定数で, 2 つの数列$\{x_n\}$と$\{y_n\}$は次の関係式を満たすとする。

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 4y_n - \alpha,\ \ \sum_{k=1}^{n} y_k = 9x_n - \beta \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　x_1 と y_1 を, α と β だけの式で表せ。

(2)　2 次の正方行列 A で, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$がすべての自然数 n について成り立つものを求めよ。

(3)　$\alpha = 14$, $\beta = -21$ のとき, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$を求め, さらに$\{x_n\}$と$\{y_n\}$の一般項を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ を示せ。

(2) 関数 $\displaystyle F(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ について

$$F'(x)=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt,\ \ F''(x)=-2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は，さらに等式

$$f(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

を満たすとする。このとき，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0)=g'(0)=0,\ \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=0$$

が成り立つことを示し，$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。

3

解答解説のページへ

$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 O′AB，A′OB，B′OA を考える。ここで，辺 AB，OB，OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 O′ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 A′ は第 2 象限に，点 B′ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 A′，B′ の座標を，r, t の式で表せ。

(2)　直線 AA′，および直線 BB′ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3)　2 直線 AA′ と BB′ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4)　点 O′ の座標を r，t の式で表し，3 直線 AA′，BB′，OO′ が 1 点で交わることを示せ。

4　　解答解説のページへ

A, B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者（A, B 以外の中立的立場の者）がさいころを投げ, 1 の目が出たら A だけに 3 点, 3 の目が出たら A だけに 2 点を与え, 2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら, A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し, 先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。$n \geqq 2$ のとき, $n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず, n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1, p_2, p_3, p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2)　$q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} q_n$ を求めよ。また $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} p_n$ を求めよ。

(3)　$a = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\left| \sum_{n=1}^{k} p_n - a \right|$$

を求めよ。ただし, 必要ならば, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{3^k} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。