

1

問題のページへ

(1)  $A_n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} + 3^{n-1} \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$ であることを、数学的帰納法を用いて証明する。

(i)  $n=1$ のとき  $A_1 = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 + 3^0 \\ 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり成立する。

(ii)  $n=k$ のとき  $A_k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} + 3^{k-1} \\ 0 & 3^{k-1} \end{pmatrix}$ と仮定する。

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 2^{k-1} + 3^{k-1} \\ 0 & 3^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k + 2 \cdot 3^{k-1} + 3^{k-1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & 2^k + 3^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より、 $n \geq 1$ において、 $A_n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} + 3^{n-1} \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix}$ である。

(2)  $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} A_n$ ,  $B_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} B_n - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ に対し、

$$B_{n+1} - A_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} (B_n - A_n) - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

すると、条件より、 $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} C - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ となり、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} C - C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

よって、 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(3) (1)(2)の結果より、

$$B_n = A_n + C = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} + 3^{n-1} \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} + 3^{n-1} + 1 \\ 1 & 3^{n-1} + 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det B_n &= 2^{n-1}(3^{n-1} + 2) - (2^{n-1} + 3^{n-1} + 1) = 2^{n-1} \cdot 3^{n-1} + 2^{n-1} - 3^{n-1} - 1 \\ &= (2^{n-1} - 1)(3^{n-1} + 1) \end{aligned}$$

これより、 $\det B_n = 0$ となるのは、 $2^{n-1} = 1$ すなわち  $n=1$ のときのみである。

したがって、 $B_n$ のうち、逆行列をもたないものは  $B_1$ だけである。

## [ 解 説 ]

ていねいな誘導のついた行列の漸化式の基本問題です。

2

問題のページへ

(1)  $S(a) = \int_0^1 |x^3 - 3ax^2 + 2a^2x| dx$  に対し,  $x^3 - 3ax^2 + 2a^2x = x(x-a)(x-2a)$

(i)  $1 < a$  のとき

$$S(a) = \int_0^1 (x^3 - 3ax^2 + 2a^2x) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - ax^3 + a^2x \right]_0^1 = a^2 - a + \frac{1}{4}$$

(ii)  $a < 1$   $2a < \frac{1}{2}$  ( $a < \frac{1}{4}$ ) のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a (x^3 - 3ax^2 + 2a^2x) dx + \int_a^{2a} -(x^3 - 3ax^2 + 2a^2x) dx \\ &= \frac{a^4}{4} - a^4 + a^4 - \frac{1}{4}(1-a^4) + a(1-a^3) - a^2(1-a^2) = \frac{a^4}{2} - a^2 + a - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(iii)  $2a < 1$  ( $0 < a < \frac{1}{2}$ ) のとき

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a (x^3 - 3ax^2 + 2a^2x) dx + \int_a^{2a} -(x^3 - 3ax^2 + 2a^2x) dx \\ &\quad + \int_{2a}^1 (x^3 - 3ax^2 + 2a^2x) dx \\ &= \frac{a^4}{4} - \frac{15}{4}a^4 + 7a^4 - 3a^4 + \frac{1}{4}(1-16a^4) - a(1-8a^3) + a^2(1-4a^2) \\ &= \frac{a^4}{2} + a^2 - a + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(2)  $0 < a < \frac{1}{2}$  のとき, (1)より,  $S'(a) = 2a^3 + 2a - 1$

$$S''(a) = 6a^2 + 2 > 0$$

これより,  $S'(a)$  は単調に増加し,  $S'(0) = -1$ ,  $S'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$  から,  $0 < a < \frac{1}{2}$  に

$S'(a) = 0$  となる  $a$  がただ 1 つ存在する。この値を  $a = \alpha$  とおく。

すると,  $S(a)$  の増減は右表のようになり,  $S(a)$  の最大値は,  $S(0) = \frac{1}{4}$  である。

$a$	0	...	$\alpha$	...	$\frac{1}{2}$
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{32}$

### [ 解 説 ]

定積分の計算問題です。計算ミスが致命傷になります。

3

問題のページへ

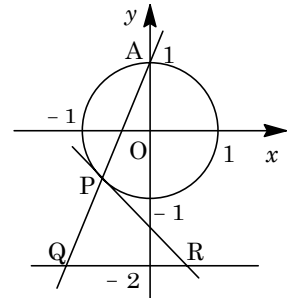
- (1)  $C: x^2 + y^2 = 1$  ..... と  $l: y = ax + 1$  ..... の交点は,

$$x^2 + (ax + 1)^2 = 1, (a^2 + 1)x^2 + 2ax = 0$$

$x \neq 0$  の解は,  $x = -\frac{2a}{a^2 + 1}$

より,  $y = -\frac{2a^2}{a^2 + 1} + 1 = \frac{-a^2 + 1}{a^2 + 1}$

よって,  $P\left(-\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{-a^2 + 1}{a^2 + 1}\right)$  となり, 点 P における円



の接線  $m$  の方程式は,

$$-\frac{2a}{a^2 + 1}x + \frac{-a^2 + 1}{a^2 + 1}y = 1, -2ax + (-a^2 + 1)y = a^2 + 1 \dots\dots$$

- (2) において,  $y = -2$  とすると  $x = -\frac{3}{a}$  から,  $Q\left(-\frac{3}{a}, -2\right)$

において,  $y = -2$  とすると  $x = \frac{a^2 - 3}{2a}$  から,  $R\left(\frac{a^2 - 3}{2a}, -2\right)$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係を用いると,

$$QR = \left| \frac{a^2 - 3}{2a} + \frac{3}{a} \right| = \frac{a^2 + 3}{2a} = \frac{1}{2} \left( a + \frac{3}{a} \right) \quad \sqrt{a \cdot \frac{3}{a}} = \sqrt{3}$$

ここで, 等号が成立するのは,  $a = \frac{3}{a}$  ( $a = \sqrt{3}$ ) のときである。

よって, 線分 QR の長さは,  $a = \sqrt{3}$  のとき最小値  $\sqrt{3}$  をとる。

- (3)  $a = \sqrt{3}$  のとき, より, 直線 AQ:  $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$

また,  $R(0, -2)$  から, 直線 AR:  $x = 0$

すると,  $\angle QAR$  の二等分線は, 2 直線 AQ, AR から等距離にあることより,

$$\frac{|\sqrt{3}x - y + 1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1}} = |x|, \sqrt{3}x - y + 1 = \pm 2x$$

$\angle QAR$  の二等分線の傾きは正より,  $y = (2 + \sqrt{3})x + 1$

[ 解説 ]

(3)では, 線分 QR を AQ : AR の比に内分する点を求め, 内角の二等分線の定理を利用しても OK です。

4

問題のページへ

(1)  $y_n = \sqrt{x_n + n} - \sqrt{n}$  とおくと、条件より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  となり、

$$x_n + n = (y_n + \sqrt{n})^2, \quad x_n = y_n^2 + 2\sqrt{n}y_n$$

$$\text{よって、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{y_n^2}{\sqrt{n}} + 2y_n \right) = 2a$$

(2)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  とおくと、

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0, \quad f''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} > 0$$

これより、曲線  $y = f(x)$  は単調に減少し、下に凸となり、右上図から、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} &< \int_n^{n+L} f(x) dx = [\sqrt{x}]_n^{n+L} \\ &= \sqrt{L+n} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

また、右下図より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} &> \int_{n+1}^{n+L+1} f(x) dx = [\sqrt{x}]_{n+1}^{n+L+1} \\ &= \sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} \end{aligned}$$

まとめると、

$$\sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$$

(3) 条件より、 $\sum_{k=1}^{L_n} \frac{1}{\sqrt{k+n}} < b \dots\dots$  , かつ、 $b \sum_{k=1}^{L_n+1} \frac{1}{\sqrt{k+n}} \dots\dots$

$$(2) \text{より、} \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L_n} \frac{1}{\sqrt{k+n}} \dots\dots$$

$$\text{より、} \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{b}{2} \dots\dots$$

また、(2)と同様にして、

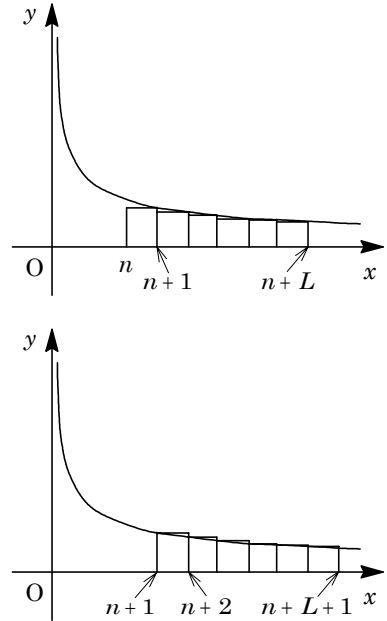
$$\frac{1}{2} \sum_{k=2}^{L+1} \frac{1}{\sqrt{k+n}} < \int_{n+1}^{n+L+1} f(x) dx = [\sqrt{x}]_{n+1}^{n+L+1} = \sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1}$$

すると、 $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L+1} \frac{1}{\sqrt{k+n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1}$  となり、

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{L_n+1} \frac{1}{\sqrt{k+n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} \dots\dots$$

$$\text{より、} \frac{b}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} \dots\dots$$

をまとめると、



$$\frac{b}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{L_n + n + 1} - \sqrt{n+1} < \frac{b}{2}$$

よって,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{L_n + n + 1} - \sqrt{n+1}) = \frac{b}{2}$

すると, (1)より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n+1}} = 2 \cdot \frac{b}{2} = b$  となり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\sqrt{n+1}} \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}} = b$$

### [ 解 説 ]

数年前まで、金沢大・理系で定番であった微積分の難問が復活です。特に、(3)は、記述しにくい設問です。