1

解答解説のページへ

自然数 n に対して, 2 次の正方行列 A_n を

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A_{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}A_n\quad (n\geqq 1)$$

により定める。また, 2 次正方行列 B_n は

$$B_{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}B_n-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\quad (n\geqq 1)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　数学的帰納法を用いて，$A_n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}+3^{n-1}\\ 0 & 3^{n-1}\end{pmatrix}$ $(n\geqq 1)$ が成り立つことを示せ。

(2)　ある 2 次正方行列 C に対して，$C=B_n-A_n$ がすべての n について成り立つとする。このとき, C を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす B_n のうち，逆行列をもたないものは B_1 に限ることを示せ。

2

解答解説のページへ

a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a \geqq 0$ のとき，$S(a)=\int_0^1 \left| x^3-3ax^2+2a^2x \right| dx$ を求めよ。

(2)　a が $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 A$(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2) a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3) (2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle$QAR を二等分する直線の方程式を求めよ。

4　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は，$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n})=a$ を満たすとする。このとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 L, n に対して

$$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

が成り立つことを示せ。

(3)　b は定数で，$b>1$ とする。自然数 n に対して，集合

$$\left\{ L \,\middle|\, L \text{ は} \sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b \text{を満たす自然数} \right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{L_n}{\sqrt{n}}=b$ が成り立つことを示せ。