1

問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=0$ すなわち $x^3-3ax+2b=0$ の解を $x=\alpha$，α，β とおくと，解と係数の関係より，

$$2\alpha+\beta=0\cdots\cdots\text{①},\ \alpha^2+2\alpha\beta=-3a\cdots\cdots\text{②},\ \alpha^2\beta=-2b\cdots\cdots\text{③}$$

①より $\beta=-2\alpha$ となり，②③に代入すると，

$$\alpha^2-4\alpha^2=-3a,\ -2\alpha^3=-2b$$

すると，$\alpha^2=a$ かつ $\alpha^3=b$ から，$a^3=b^2$ となる。

(2)　$C: y=x^{\frac{2}{3}}$ 上の接点を $\left(t,\ t^{\frac{2}{3}}\right)$ とおくと，$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ より，接線の方程式は，

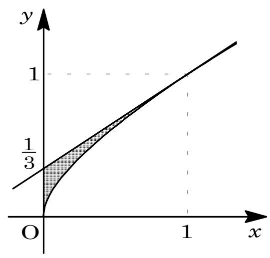
$$y-t^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}(x-t),\ y=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}x+\frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}$$

直線 $l: y=mx+\dfrac{1}{3}$ と一致することより，

$$\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}=m\cdots\cdots\text{④},\ \frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdots\cdots\text{⑤}$$

$t\geqq 0$ より，⑤から $t=1$ となり，接点の座標は $(1,\ 1)$，また④から $m=\dfrac{2}{3}$ である。

さて，直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，$C: x=y^{\frac{3}{2}}$ より，



$$V=\pi\int_0^1\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\pi\int_0^1 y^3dy-\frac{2}{9}\pi=\frac{1}{4}\pi-\frac{2}{9}\pi=\frac{1}{36}\pi$$

[解 説]

小問 2 題という構成に変わりました。どちらも，基本的な内容です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　(i)　$x \neq 0$ のとき　$xw = yz$ から $w = \dfrac{yz}{x}$ となり，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{yz}{x} \end{pmatrix} = \frac{z}{x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{z}{x}\vec{u}$$

(ii)　$x = 0$ のとき　$\vec{u} \neq \vec{0}$ から $y \neq 0$ で，$xw = yz$ から $z = 0$，$\vec{v} \neq \vec{0}$ から $w \neq 0$ となり，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \frac{w}{y}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \frac{w}{y}\vec{u}$$

(i)(ii)より，いずれの場合も $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行である。

(2)　X が逆行列をもたない条件は，$\det X = 0$ から，$xw = yz$

このとき, (1)より，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行であり，$\vec{v} = k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ ……①と表せる。

ここで，条件より，

$$A\vec{u} = a\vec{u} \cdots\cdots\cdots ②,\quad A\vec{v} = b\vec{v} \cdots\cdots\cdots ③$$

①③より，$Ak\vec{u} = bk\vec{u}$ となり，$k \neq 0$ から $A\vec{u} = b\vec{u}$ ………④

②④より，$a\vec{u} = b\vec{u}$ となり，$\vec{u} \neq \vec{0}$ から $a = b$ である。

(3)　(2)より，$a \neq b$ ならば X は逆行列をもち，$\det X \neq 0$ である。

②③をまとめると，$A\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bz \\ ay & bw \end{pmatrix}$ となり,

$$A\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\quad AX = X\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ここで，$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab$ より，両辺の行列式をとると，

$$\det A \cdot \det X = ab \det X$$

$ab \neq 0$ から $\det A \neq 0$ となり, A は逆行列をもつ。

[解 説]

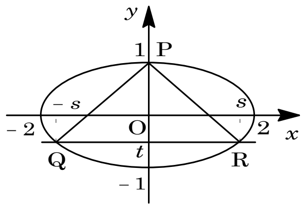
有名な定理の証明です。誘導に従うと，無理なく進みます。

3

問題のページへ

(1)　△PQR の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2s(1-t)=s(1-t)$$



ここで，$\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$ より，$s=2\cos\theta$，$t=\sin\theta$ とおける。すると，$s>0$，$-1<t<1$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$S(t)=f(\theta)$ とすると，

$$f(\theta)=2\cos\theta(1-\sin\theta)$$

$$f'(\theta)=-2\sin\theta(1-\sin\theta)-2\cos^2\theta=4\sin^2\theta-2\sin\theta-2$$

$$=2(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	

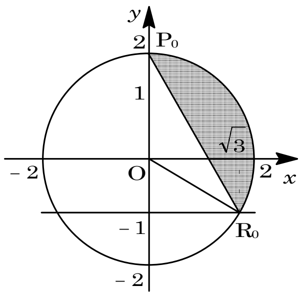
よって，右表より $S(t)$ は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。このとき，$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ から $s=\sqrt{3}$，$t=-\dfrac{1}{2}$ となり，$\mathrm{R}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2)　R における接線 l は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x-\dfrac{1}{2}y=1$ となり，x 軸との交点は $\mathrm{T}\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ である。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{RT}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ となり，

$$\cos\angle\mathrm{PRT}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{RT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RT}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}=\frac{-1+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}\sqrt{3+\frac{9}{4}}}=-\frac{1}{7}$$

(3)　楕円 C を y 軸方向に 2 倍拡大すると，点 P は $\mathrm{P}_0(0,\ 2)$，点 R は $\mathrm{R}_0(\sqrt{3},\ -1)$ に移り，$\angle\mathrm{P}_0\mathrm{OR}_0=\dfrac{2}{3}\pi$ となる。



ここで，右図の弓形の面積を S_0 とおくと，

$$S_0=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

すると，直線 PR によって分割される楕円 C の原点を含まない部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}S_0=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[解　説]

楕円についての基本的な問題です。(3)では，楕円を円にいったん変換して，面積を計算しました。

4

問題のページへ

(1)　終了直前に取り出した玉の数字は，$0+4$，$1+3$，$2+2$，$3+1$，$4+0$ のいずれかである。ここで，ちょうど k 回目の試行で終了する確率を P_k とすると，

$$P_2=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times 5=\frac{1}{5},\quad P_3=(1-P_2)\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25},\quad P_4=(1-P_2-P_3)\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

これより，一般的に $P_k=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$ と推測できる。以下，この式を数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$k=2$ のとき　$P_2=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{5}$ より成立する。

(ii)　$k\leqq l$ のとき　$P_k=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}P_{l+1}&=(1-P_2-P_3-\cdots-P_l)\times\frac{1}{5}\\&=\left\{1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2-\cdots-\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{l-2}\right\}\times\frac{1}{5}\\&=\left\{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{l-1}}{1-\frac{4}{5}}\right\}\times\frac{1}{5}=\left\{1-1+\left(\frac{4}{5}\right)^{l-1}\right\}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{l-1}\end{aligned}$$

よって，$k=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$2\leqq k\leqq n$ のとき，$P_k=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$ である。

(2)　2 回の試行で終了したとき，得点が 0 以外，すなわち 1, 2, 3, 4 となる確率は，それぞれ $\frac{1}{5}P_2=\frac{1}{25}$ ずつであるので，その期待値 E_2 は，

$$E_2=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{1}{25}+3\times\frac{1}{25}+4\times\frac{1}{25}=\frac{2}{5}$$

また，3 回以下の試行で終了したとき，得点が 0 以外，すなわち 1, 2, 3, 4 となる確率は，それぞれ $\frac{1}{5}P_2+\frac{1}{5}P_3=\frac{9}{125}$ ずつであるので，その期待値 E_3 は，

$$E_3=1\times\frac{9}{125}+2\times\frac{9}{125}+3\times\frac{9}{125}+4\times\frac{9}{125}=\frac{18}{25}$$

同様に，n 回以下の試行で終了したとき，得点が 0 以外，すなわち 1, 2, 3, 4 となる確率は，それぞれ，

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}P_2+\frac{1}{5}P_3+\cdots+\frac{1}{5}P_n&=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\right\}\\&=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

よって，得点の期待値 E_n は，

$$E_n=(1+2+3+4)\times\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}=2\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　(2)から，$\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}E_n=2$ となり，$E_n\geqq\alpha-\frac{1}{100}$ ……(＊)より，

$$2\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\} \geqq 2-\frac{1}{100},\ \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \leqq \frac{1}{200}$$

両辺の対数をとって,

$$(n-1)(\log_{10}4-\log_{10}5) \leqq -(\log_{10}5+\log_{10}4+1)$$

$$(n-1)(3\log_{10}2-1) \leqq -(2+\log_{10}2)$$

$3\log_{10}2-1<0$ より,

$$n \geqq \frac{2+\log_{10}2}{1-3\log_{10}2}+1 \quad 24.7$$

よって, (*)を満たす最小の自然数 n は 25 である。

[解 説]

(1)と(2)は，ともに題意に沿った形で，帰納的に解いています。なお，直接的に P_k を導くことも可能です。