1

問題のページへ

(1)　$x_1=1$，$x_{n+1}=x_n+2^n$ より, $n\geqq2$ において,

$$x_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$$

$n=1$ をあてはめると $x_1=1$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

(2)　$y_1=\frac{4}{3}$，$\frac{1}{y_{n+1}}=\frac{4}{y_n}+\frac{3}{4}$ より，$\frac{1}{y_{n+1}}+\frac{1}{4}=4\left(\frac{1}{y_n}+\frac{1}{4}\right)$

$$\frac{1}{y_n}+\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{4}\right)4^{n-1}=4^{n-1}$$

よって，$\frac{1}{y_n}=\frac{4^n-1}{4}$，$y_n=\frac{4}{4^n-1}$

(3)　$\overrightarrow{a_n}\perp\overrightarrow{b_n}$ より，$\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{b_n}=0$ となり，

$$\left(16-\frac{1}{x_n}\right)\frac{x_n}{4}+\left(\frac{16}{x_n}-1\right)\frac{1}{y_n}=0,\quad 4x_n-\frac{1}{4}+\frac{16}{x_ny_n}-\frac{1}{y_n}=0$$

(1)(2)より，$4(2^n-1)-\frac{1}{4}+4(2^n+1)-\frac{4^n-1}{4}=0$

$$8\cdot2^n=\frac{4^n}{4},\quad 2^{n+3}=2^{2n-2}$$

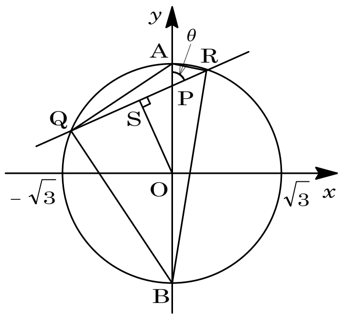
よって，$n+3=2n-2$ より，$n=5$

[解　説]

数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$は, 漸化式で定義されていますが, どちらも基本的なものです。

2

問題のページへ



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OS}=\mathrm{OP}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

また，$\mathrm{SR}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OS}^2}=\sqrt{3-2\sin^2\theta}$ より，

$$\mathrm{QR}=2\mathrm{SR}=2\sqrt{3-2\sin^2\theta}$$

(2)　$T_1=\triangle\mathrm{AQB}$，$T_2=\triangle\mathrm{ABR}$ なので，

$$T_1=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{AP}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{QP}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$$

$$T_2=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PB}\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot 2\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$$

よって，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ は, (1)より,

$$S(\theta)=T_1+T_2=\sqrt{3}(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{QR}\sin\theta=2\sqrt{3}\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$$

(3)　$2\sqrt{3}<S(\theta)$ より，$1<\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$ となり，$1<(3-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$

$$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1<0,\ (2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\sqrt{2}\sin\theta-1>0$ と同値になる。

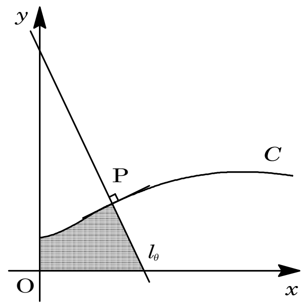
よって，$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

[解 説]

四角形の面積は，2 本の対角線の長さとそのなす角を用いて表すことができます。(1)と(2)は，この公式を誘導する設問です。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1) $C: x = 2t - \sin t$，$y = 2 - \cos t$ より，

$$\frac{dx}{dt} = 2 - \cos t\,,\ \ \frac{dy}{dt} = \sin t$$

すると，$t = \theta$ のとき，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin\theta}{2 - \cos\theta}$

$\mathrm{P}(2\theta - \sin\theta,\ 2 - \cos\theta)$における法線$l_\theta$は,

$$y - (2 - \cos\theta) = -\frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta}\{x - (2\theta - \sin\theta)\}$$

よって，$y = -\dfrac{2 - \cos\theta}{\sin\theta}x + \dfrac{2\theta(2 - \cos\theta)}{\sin\theta}$ ………(＊)

(2) l_θ と x 軸との交点は, (＊)から,

$$-\frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta}x + \frac{2\theta(2 - \cos\theta)}{\sin\theta} = 0\,,\ \ x = 2\theta$$

また，l_θ と y 軸との交点は，$y = \dfrac{2\theta(2 - \cos\theta)}{\sin\theta}$ となり，三角形の面積$S(\theta)$は,

$$S(\theta) = \frac{1}{2}\cdot 2\theta\cdot\frac{2\theta(2 - \cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{2\theta^2(2 - \cos\theta)}{\sin\theta}$$

(3) $0 < \theta < \pi$ より，$2\theta - \sin\theta < 2\theta$ となるので，網点部の面積$T(\theta)$は,

$$T(\theta) = \int_0^{2\theta - \sin\theta} y\,dx + \frac{1}{2}\{2\theta - (2\theta - \sin\theta)\}(2 - \cos\theta)$$

$$= \int_0^{\theta}(2 - \cos t)(2 - \cos t)\,dt + \frac{1}{2}\sin\theta(2 - \cos\theta)$$

$$= \int_0^{\theta}(2 - \cos t)^2\,dt + \sin\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\theta}(2 - \cos t)^2\,dt = \int_0^{\theta}(4 - 4\cos t + \cos^2 t)\,dt$

$$= 4\theta - 4\sin\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\theta}(1 + \cos 2t)\,dt$$

$$= -4\sin\theta + \frac{9}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

よって，$T(\theta) = -4\sin\theta + \dfrac{9}{2}\theta + \dfrac{1}{4}\sin 2\theta + \sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 2\theta = \dfrac{3}{2}(3\theta - 2\sin\theta)$

(4) $\dfrac{T(\theta)}{S(\theta)} = \dfrac{3\sin\theta(3\theta - 2\sin\theta)}{4\theta^2(2 - \cos\theta)} = \dfrac{3}{4(2 - \cos\theta)}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}\left(3 - 2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)$より,

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)} = \frac{3}{4\cdot 1}\cdot 1\cdot(3 - 2) = \frac{3}{4}$$

[解 説]

微積分の総合問題です。制限時間は 1 題 30 分なので, 余裕をもって計算を進めることができます。

4　　問題のページへ

(1)　$AX = XD$ より，$\begin{pmatrix} a & 2 \\ -1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -2c \end{pmatrix}$

$2a+2=2c$ ………①，$a+2=-2c$ ………②

$-2+b=c$ ………③，$-1+b=-2c$ ………④

①②より，$a=-\dfrac{4}{3}$，$c=-\dfrac{1}{3}$

③より $b=\dfrac{5}{3}$ となり，この b, c の値は④を満たす。

(2)　(1)より $D=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるので，$D^n = \dfrac{1}{3^n}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

さて，$X^{-1} = \dfrac{1}{2-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ であり，$A = XDX^{-1}$ から，

$$A^n = XD^nX^{-1} = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)^n & 2^n \\ (-1)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix} 2\cdot(-1)^n - 2^n & 2\cdot(-1)^{n+1} + 2^{n+1} \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

(3)　条件より，$x_n = \dfrac{1}{3^n}\{2\cdot(-1)^n - 2^n - (-1)^n + 2^n\} = \dfrac{(-1)^n}{3^n} = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$y_n = \frac{1}{3^n}\{2\cdot(-1)^{n+1} + 2^{n+1} - (-1)^{n+1} - 2^{n+1}\} = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} = -\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

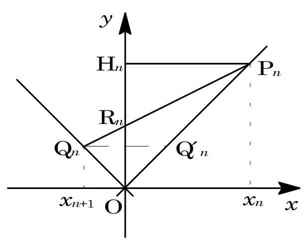
ここで，$\mathrm{P}_n(x_n,\ x_n)$，$\mathrm{Q}_n(x_{n+1},\ y_{n+1})$ に対して，$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ と y 軸の交点を R_n とおくと，R_n は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$ を $|x_n| : |x_{n+1}| = 3:1$ に内分する点より，その y 座標は,

$$\frac{1}{4}(x_n + 3y_{n+1}) = \frac{1}{4}\left\{\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

さて，点 P_n は直線 $y=x$ 上にあり，点 Q_n は直線 $y=-x$ 上にある。ここで，点 Q_n を y 軸に関して対称移動した点を Q'_n とおくと，点 Q'_n は直線 $y=x$ 上にあり,

$$\mathrm{OQ}'_n = \mathrm{OQ}_n = \sqrt{{x_{n+1}}^2 + {y_{n+1}}^2} < \sqrt{{x_n}^2 + {x_n}^2} = \mathrm{OP}_n$$

よって，点 Q'_n は線分 OP_n 上に存在する。



ここで，点 P_n から y 軸に下ろした垂線を $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$ とおくと，$\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$ を y 軸のまわりに 1 回転したときにできる回転体 S は，$\triangle\mathrm{OP}_n\mathrm{H}_n$ を y 軸のまわりに 1 回転したときにできる円錐から，$\triangle\mathrm{R}_n\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$ を y 軸のまわりに 1 回転したときにできる円錐を取り除いたものとなる。

以上より，この回転体 S の体積 V_n は,

$$V_n=\frac{1}{3}\pi|x_n|^2|x_n|-\frac{1}{3}\pi|x_n|^2\left|x_n-\frac{1}{4}(x_n+3y_{n+1})\right|$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{9}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{9}\right)^n\left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right|$$
$$=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{9}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{9}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{6}\pi\left(\frac{1}{27}\right)^n$$

すると，数列$\{V_n\}$は公比$\frac{1}{27}$の等比数列となり，$0<\frac{1}{27}<1$より$\sum_{n=1}^{\infty}V_n$は収束し，

$$\sum_{n=1}^{\infty}V_n=\frac{\frac{1}{6}\pi\cdot\frac{1}{27}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{\pi}{156}$$

[解 説]

(1)と(2)は，対角行列を利用した n 乗計算という有名問題です。(3)ではその結果を利用して，回転体の体積を求めます。なお，nの偶奇によって，回転体の位置がx軸の上下と変わりますので，V_nは絶対値をつけて立式しています。