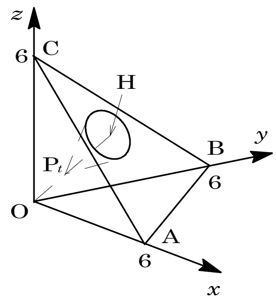
1

問題のページへ

(1)　3 点 A(6, 0, 0)，B(0, 6, 0)，C(0, 0, 6) の定める平面 α の方程式は,

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1,\ x+y+z=6$$

すると，平面 α の法線ベクトルは $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ となるので，k を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{n}=k(1,\ 1,\ 1)$ から，H$(k,\ k,\ k)$ と表せ,



$$k+k+k=6,\ k=2$$

よって，H(2, 2, 2) となり，$\mathrm{OH}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ より,

$$0<t<2\sqrt{3}$$

(2)　P_t を頂点とする円錐は母線 $\mathrm{OH}=2\sqrt{3}$，高さ $\mathrm{P}_t\mathrm{H}=t$ から，円 S_t の半径は,

$$\sqrt{(2\sqrt{3})^2-t^2}=\sqrt{12-t^2}$$

よって，円錐の体積 $f(t)$ は,

$$f(t)=\frac{1}{3}\pi(12-t^2)t=\frac{1}{3}\pi(-t^3+12t)$$

(3)　(2)より，$f'(t)=\frac{1}{3}\pi(-3t^2+12)$

$$=-\pi(t+2)(t-2)$$

すると，右表より，$f(t)$ の最大値は,

$$f(2)=\frac{1}{3}\pi(-8+24)=\frac{16}{3}\pi$$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗		↘	

[解 説]

切片を利用して平面の方程式を記述しました。詳細はピンポイントレクチャーを参照してください。

2

問題のページへ

(1)　$P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$に対して,

$$P^2=\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2a+2a^2 & 2a-2a^2\\ 2a-2a^2 & 1-2a+2a^2\end{pmatrix}$$

ここで，$b=2a-2a^2$とおくと，$P^2=\begin{pmatrix}1-b & b\\ b & 1-b\end{pmatrix}$となる。

(2)　$P^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$と表されることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$のとき　$p_1=a$とおくと成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$P^k=\begin{pmatrix}1-p_k & p_k\\ p_k & 1-p_k\end{pmatrix}$であると仮定する。

$$\begin{aligned}P^{k+1}&=\begin{pmatrix}1-p_k & p_k\\ p_k & 1-p_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-a-p_k+2ap_k & a+p_k-2ap_k\\ a+p_k-2ap_k & 1-a-p_k+2ap_k\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-a-(1-2a)p_k & a+(1-2a)p_k\\ a+(1-2a)p_k & 1-a-(1-2a)p_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで，$p_{k+1}=a+(1-2a)p_k$とおくと，$P^{k+1}=\begin{pmatrix}1-p_{k+1} & p_{k+1}\\ p_{k+1} & 1-p_{k+1}\end{pmatrix}$となる。

(i)(ii)より，$P^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$と表される。

(3)　(2)より，$p_{n+1}=a+(1-2a)p_n$となり,

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=(1-2a)\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって，$p_n-\dfrac{1}{2}=\left(p_1-\dfrac{1}{2}\right)(1-2a)^{n-1}$，$p_n=\dfrac{1}{2}+\left(a-\dfrac{1}{2}\right)(1-2a)^{n-1}$

ここで, $0<a<1$から$-1<1-2a<1$となり, $n\to\infty$のとき$(1-2a)^n\to 0$から,

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$$

[解 説]

行列のn乗についての平易な頻出題です。誘導の意味も一目瞭然です。

3

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x) = \sin x$, $x < 0$ または $\pi < x$ のとき $f(x) = 0$ より，

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx = \int_0^{\pi} \{f(x)\}^2 dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx = \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}\Big[x - \frac{1}{2}\sin 2x \Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

また，$0 \leqq x - \frac{\pi}{2} \leqq \pi$ $\left(\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{3}{2}\pi\right)$ のとき $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$ となり，$x - \frac{\pi}{2} < 0$ または $\pi < x - \frac{\pi}{2}$ $\left(x < \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi < x\right)$ のとき $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ である。

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2 x\, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big[x + \frac{1}{2}\sin 2x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = \frac{\pi}{2}$$

(2)　$I = \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ とおくと，

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin x \cos x\, dx = -\Big[\frac{1}{2}\sin^2 x \Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{1}{2}$$

(3)　$T(a) = 4a^2 \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx + 4\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx + \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$

(1)(2)より，$T(a) = 4a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi a^2 + \frac{\pi}{2a^2} + 2$

$a > 0$ から，相加平均と相乗平均の関係より，

$$T(a) \geqq 2\sqrt{2\pi a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^2}} + 2 = 2\pi + 2$$

等号成立は，$2\pi a^2 = \frac{\pi}{2a^2}$ すなわち $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

以上より，$a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$T(a)$ は最小値 $2\pi + 2$ をとる。

[解 説]

積分区間を分けて丁寧に計算すれば OK です。思考を整理するために，グラフを書くのも 1 つの手です。

4

問題のページへ

(1)　n 回さいころを振ったとき，1 の目が出ない確率は$\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ より，少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率 a_n は,

$$a_n = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2)　k 回目に振ったとき，はじめて 1 の目が出る確率を b_k は，$b_k = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$ である。

ここで，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kb_k = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ とおくと,

$$6S_n - 5S_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = 1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$S_n = 6\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right\} - n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 6-(n+6)\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ となり,

$$M_n = \frac{6-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n} = 6 - \frac{n\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(3)　条件より, $n\to\infty$のとき$n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \to 0$ なので, (2)から,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 6$$

[解 説]

有名な(等差)×(等比)タイプの数列の和 S_n で，期待値を計算していることがわかります。