1

解答解説のページへ

3 点 A(6, 0, 0), B(0, 6, 0), C(0, 0, 6) の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また, 線分 HO 上の点で, H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし, P_t の動く範囲から両端点 H, O は除くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標と, t の動く範囲を求めよ。

(2) 平面 α 上にあり, P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし, P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3) (2)の $f(t)$ の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

定数 a は $0<a<1$ を満たすとする。行列 $P=\begin{pmatrix} 1-a & a \\ a & 1-a \end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) P の 2 乗は $P^2=\begin{pmatrix} 1-b & b \\ b & 1-b \end{pmatrix}$ という形で表されることを示せ。

(2) n が自然数のとき, P の n 乗は $P^n=\begin{pmatrix} 1-p_n & p_n \\ p_n & 1-p_n \end{pmatrix}$ という形で表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) (2)の p_n について, 数列 $\{p_n\}$ の一般項と $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x)=\sin x$ とおき，$x<0$ または $\pi<x$ のとき $f(x)=0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 2つの定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx$ と $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) f\left(x-\frac{\pi}{2}\right) dx$ の値を求めよ。

(3) $a>0$ について，$T(a)=\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{2af(x)+\frac{1}{a}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

1 個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$M_n=\dfrac{1}{a_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

(3)　(2)の M_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}M_n$ を求めよ。ただし，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つことを用いてもよい。