1

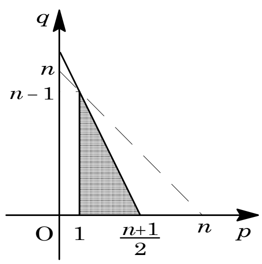
問題のページへ

(1)　動点 P が原点から n 回進み，点$(p,\ q)$に到達するのは，右に p 回，上に q 回だけ移動し，停留が$n-p-q$回の場合である。すなわち，a が p 個，b が q 個，c が $n-p-q$ 個の文字列が対応し，その総数は，

$$F_n(p,\ q)=\frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}$$

(2)　$F_n(p-1,\ q)\leqq F_n(p,\ q)$のとき，$\dfrac{F_n(p-1,\ q)}{F_n(p,\ q)}\leqq 1$となり，

$$\frac{\dfrac{n!}{(p-1)!q!(n-p+1-q)!}}{\dfrac{n!}{p!q!(n-p-q)!}}=\frac{p}{n-p+1-q}\leqq 1$$

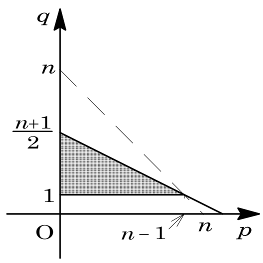


よって，$p\leqq n-p+1-q$ より，$2p+q\leqq n+1$

$p\geqq 1$，$q\geqq 0$，$p+q\leqq n$ と合わせて$(p,\ q)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。

次に$F_n(p,\ q-1)\leqq F_n(p,\ q)$より，$\dfrac{F_n(p,\ q-1)}{F_n(p,\ q)}\leqq 1$

$$\frac{\dfrac{n!}{p!(q-1)!(n-p-q+1)!}}{\dfrac{n!}{p!q!(n-p-q)!}}=\frac{q}{n-p-q+1}\leqq 1$$



よって，$q\leqq n-p-q+1$ より，$p+2q\leqq n+1$

$p\geqq 0$，$q\geqq 1$，$p+q\leqq n$ と合わせて$(p,\ q)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。

(3)　(2)より，$F_n(p-1,\ q)=F_n(p,\ q)$となるのは，$2p+q=n+1$ ………①

$F_n(p,\ q-1)=F_n(p,\ q)$となるのは，$p+2q=n+1$ ………②

①と②の交点は，①－②より $p-q=0$ となり，$p=q=\dfrac{n+1}{3}$

条件より，$n+1$ は 3 の倍数なので，交点$\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$は格子点となる。

さて，$q=q_0$ として，いったん q を固定して$F_n(p,\ q)$の値の変化を考えると，$F_n(p-1,\ q_0)\leqq F_n(p,\ q_0)$を満たす条件は，(2)より，

$$2p+q_0\leqq n+1,\ p\leqq\frac{n+1-q_0}{2}$$

そこで，$F_n(p,\ q_0)$の最大値を，$\dfrac{n+1-q_0}{2}$が整数かどうかで分けて考えると，

(i)　$\dfrac{n+1-q_0}{2}$が整数のとき

2 点$\left(\dfrac{n+1-q_0}{2},\ q_0\right)$，$\left(\dfrac{n+1-q_0}{2}-1,\ q_0\right)$で，$F_n(p,\ q_0)$は最大となる。

(ii)　$\dfrac{n+1-q_0}{2}$が整数でないとき

点$\left(\dfrac{n+1-q_0}{2}-\dfrac{1}{2},\ q_0\right)$で，$F_n(p,\ q_0)$は最大となる。

次に，それぞれのq_0について$F_n(p,\ q_0)$の値が最大となる上記の$(p,\ q_0)$に対し，q_0を変化させて$F_n(p,\ q)$の値の変化を考える。

ここで，$F_n(p,\ q-1) \leqq F_n(p,\ q)$を満たす領域が，(2)から$p+2q \leqq n+1$より，

(i)　$(p,\ q)$が領域$p+2q<n+1$にあるとき

pの値が等しい 2 点は，上側の点の方が$F_n(p,\ q)$の値が大きい。

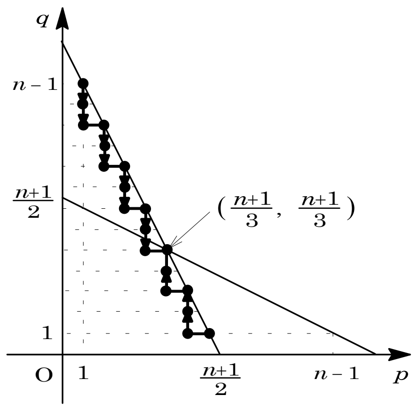
(ii)　$(p,\ q)$が領域$p+2q>n+1$にあるとき

pの値が等しい 2 点は，下側の点の方が$F_n(p,\ q)$の値が大きい。

(iii)　$(p,\ q)$が直線$p+2q=n+1$上にあるとき

$F_n(p,\ q)$の値と，その 1 つ下に位置する$(p,\ q-1)$における$F_n(p,\ q-1)$は等しい。

以上より，$F_n(p,\ q)$の値の大小関係をまとめると，右図のようになる。なお，図中で記号 ⟶ は「＜」を，記号●―●は「＝」を意味するものとする。



したがって，$n>2$ とき，$F_n(p,\ q)$の値は$(p,\ q)=\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{n-2}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n-2}{3}\right)$において最大になる。

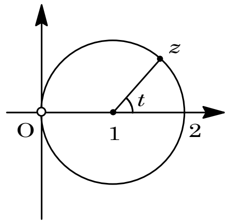
なお，$n=2$のとき，$F_n(p,\ q)$の値は$(p,\ q)=\left(\dfrac{2+1}{3},\ \dfrac{2+1}{3}\right)=(1,\ 1)$においてのみ最大になる。

[解　説]

(3)の答は，直観的にはわかるものの，それをどのように論理展開して導けばよいのか，そこが難しいところです。1 文字固定の方法を利用して記しましたが，文章や式だけでは言い足らず，最後は「図の力」を借りる形になってしまいました。

2

問題のページへ



(1)　$z=1+\cos t+i\sin t$ のとき，

$$|z|^2=(1+\cos t)^2+\sin^2 t=2+2\cos t=4\cos^2\frac{t}{2}$$

$-\pi<t<\pi$ より，$\cos\dfrac{t}{2}>0$ となり，$|z|=2\cos\dfrac{t}{2}$

$$z=2\cos^2\frac{t}{2}+2i\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right)$$

よって，$\arg z=\dfrac{t}{2}$

また，$\dfrac{1}{z^2}=z^{-2}=\dfrac{1}{4\cos^2\frac{t}{2}}\{\cos(-t)+i\sin(-t)\}$

(2)　(1)より，$w=\dfrac{2i}{z^2}=\dfrac{2i}{4\cos^2\frac{t}{2}}\{\cos(-t)+i\sin(-t)\}$ なので，

$$w=\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\{-\sin(-t)+i\cos(-t)\}=\frac{1}{1+\cos t}(\sin t+i\cos t)$$

$w=x+yi$ とおくと，

$$x=\frac{\sin t}{1+\cos t}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad y=\frac{\cos t}{1+\cos t}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$(y-1)\cos t=-y$，$\cos t=\dfrac{y}{1-y}\ (y\neq 1)\cdots\cdots\cdots③$

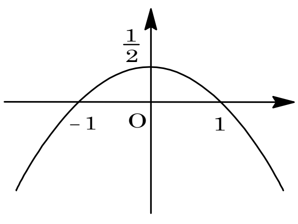
①に代入して，$\sin t=x\left(1+\dfrac{y}{1-y}\right)=\dfrac{x}{1-y}\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\left(\dfrac{x}{1-y}\right)^2+\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^2=1$，$x^2+y^2=(1-y)^2$，$y=\dfrac{1-x^2}{2}$

さて，①より，$x=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\tan\dfrac{t}{2}$ となり，x は

$-\pi<t<\pi$ においてすべての実数をとりうる。

よって，w の軌跡は放物線 $y=\dfrac{1-x^2}{2}$ であり，図示すると右図のようになる。



[解 説]

文系にも類似した問題がありますが，本問の方が基本的です。なお，(1)の偏角には，$2n\pi$ を加えた方がよかったかもしれません。

3

問題のページへ

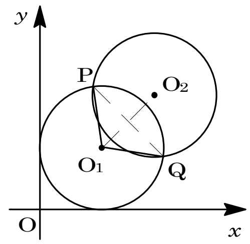
(1) 2円O_1，O_2の中心間距離をdとすると，$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$から，

$$d=\sqrt{(1-r-r)^2+(1-r-r)^2}=\sqrt{2}\,|1-2r|=\sqrt{2}\,(1-2r)\cdots\cdots\cdots①$$

2円が接するとき，$\sqrt{2}(1-2r)=r+r$，$\sqrt{2}=(2+2\sqrt{2})r$より，

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

この値は$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$を満たしている。



(2) 条件から，中心間距離が$d=2r\cos\theta$となり，①より，

$$\sqrt{2}(1-2r)=2r\cos\theta,\quad r=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)}$$

また，線分PQで領域Dは二等分されるので，

$$S=\left\{\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}r^2(2\pi-2\theta)\right\}\times 2=r^2(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)$$

$$=\frac{\sin 2\theta+2\pi-2\theta}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}\cdots\cdots\cdots②$$

(3) 2円O_1，O_2の位置関係によって，場合分けをする。

(i) $0<r\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$のとき

(1)より，2円O_1，O_2は離れているか，または接しているので，

$$S=\pi r^2\times 2=2\pi r^2$$

よって，rの値が増加するとき，Sは単調に増加する。

(ii) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<r<\dfrac{1}{2}$のとき

2円O_1，O_2は交わっており，(2)より，$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)}<\dfrac{1}{2}$

すると，$\cos\theta<1$かつ$0<\cos\theta$より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$となる。逆に，θが$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲で増加するとき，$\cos\theta$は単調に減少し，rは$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<r<\dfrac{1}{2}$において単調に増加する。

さて，②より，

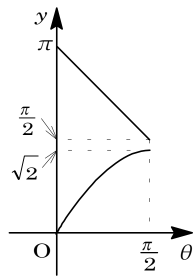
$$S'=\frac{(2\cos 2\theta-2)(\sqrt{2}+\cos\theta)^2-(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)\cdot 2(\sqrt{2}+\cos\theta)(-\sin\theta)}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)^4}$$

$$=\frac{(\cos 2\theta-1)(\sqrt{2}+\cos\theta)+(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)\sin\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^3}$$

ここで，$f(\theta)=(\cos 2\theta-1)(\sqrt{2}+\cos\theta)+(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)\sin\theta$とおくと，

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= \sqrt{2}\cos 2\theta + \cos 2\theta\cos\theta - \sqrt{2} - \cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta + (2\pi - 2\theta)\sin\theta \\
&= \sqrt{2}\cos 2\theta + \cos(2\theta - \theta) - \sqrt{2} - \cos\theta + (2\pi - 2\theta)\sin\theta \\
&= \sqrt{2}(1 - 2\sin^2\theta) - \sqrt{2} + (2\pi - 2\theta)\sin\theta \\
&= 2\sin\theta(-\sqrt{2}\sin\theta + \pi - \theta)
\end{aligned}
$$

そこで，$y = \sqrt{2}\sin\theta$ と $y = \pi - \theta$ のグラフを $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において書くと右図のようになる。



よって，$-\sqrt{2}\sin\theta + \pi - \theta > 0$ から，$f(\theta) > 0$ となる。すると，$S' > 0$ から θ の増加に伴って，S は単調に増加する。すなわち, r の値が増加するとき, S は単調に増加する。

(iii)　$r = \dfrac{1}{2}$ のとき

2 円 O_1，O_2 は重なるので，$S = \pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\pi$

(i)(ii)(iii) より, S は連続的に変化するので，最大となるのは $r = \dfrac{1}{2}$ のときである。

[解 説]

円 O_1 は x 軸, y 軸に接し，円 O_2 は 2 直線 $x = 1$，$y = 1$ に接する同じ半径の円です。半径を $\dfrac{1}{2}$ まで増加させたときの 2 円の位置関係を考えますが，得られた結論は予想とは反したものでした。

4

問題のページへ

(1)　$y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ より，$y'=\dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}>0$

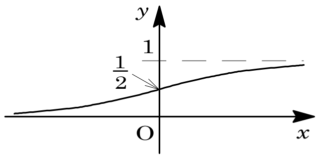
これより，すべての実数で単調に増加する。

$$y''=\frac{-e^{-x}(e^{-x}+1)^2-2e^{-x}(e^{-x}+1)(-e^{-x})}{(e^{-x}+1)^4}$$

$$=\frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(e^{-x}+1)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	$\cup$	$\frac{1}{2}$	$\cap$

よって，$y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフは変曲点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ をもち，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=1$ から，その概形は右図のようになる。



(2)　$g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx=\int_{-1}^{r}\left(\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{e^a+e^x}\right)dx$

$$=\Big[\log(1+e^x)-\log(e^a+e^x)\Big]_{-1}^{r}=\Big[\ \log\frac{1+e^x}{e^a+e^x}\ \Big]_{-1}^{r}$$

$$=\log\frac{1+e^r}{e^a+e^r}-\log\frac{1+e^{-1}}{e^a+e^{-1}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\log\frac{1+e^r}{e^a+e^r}=\lim_{r\to\infty}\log\frac{e^{-r}+1}{e^ae^{-r}+1}=\log 1=0$ より，

$$\lim_{r\to\infty}g_a(r)=-\log\frac{1+e^{-1}}{e^a+e^{-1}}=-\log\frac{e+1}{e^{a+1}+1}=\log\frac{e^{a+1}+1}{e+1}$$

(3)　(2)より，$h(a)=\log\dfrac{e^{a+1}+1}{e+1}$ となり，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\log\frac{e^{a+1}+1}{e+1}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\log\frac{e^a(e+e^{-a})}{e+1}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left(a+\log\frac{e+e^{-a}}{e+1}\right)=\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\log\frac{e+e^{-a}}{e+1}\right)=1$$

[解 説]

(2)では(1)との関連を考え，はさみうち利用の難問かとも思いましたが，予測ははずれてしまいました。被積分関数の分母と分子に，単に e^x をかけるだけで，直接 $g_a(r)$ が求まってしまいます。