1

解答解説のページへ

座標平面上で動点Pが, x 軸の正の方向へ1進むことを文字aで表し, y 軸の正の方向へ1進むことを文字bで表し, 停留することを文字cで表す。a, b, cからなる文字列が与えられたとき, 点Pは原点を出発し, その文字列に従って移動する。たとえば, 長さ4の文字列acabに対しては, 点Pは原点$(0,\ 0)$から出発して, $(1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$と移動し, 点$(2,\ 1)$が到達点となる。長さ n の文字列のなかで, 点Pの到達点が$(p,\ q)$となる文字列の個数を$F_n(p,\ q)$とする。

(1)　$F_n(p,\ q)$を p, q, n を用いて表せ。ただし, n は自然数, p, q は $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p+q \leqq n$ の範囲の整数とする。

(2)　自然数 n が与えられているとき, $F_n(p-1,\ q) \leqq F_n(p,\ q)$を満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ $(p \geqq 1,\ q \geqq 0,\ p+q \leqq n)$ の範囲を図示せよ。また, $F_n(p,\ q-1) \leqq F_n(p,\ q)$ を満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ $(p \geqq 0,\ q \geqq 1,\ p+q \leqq n)$の範囲を図示せよ。

(3)　$n+1$が3の倍数となる自然数 n が与えられているとき, $F_n(p,\ q)$が最大になる自然数 p, q の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。

2　解答解説のページへ

複素数平面上で中心が 1，半径 1 の円を C とする。以下，i は虚数単位とする。

(1)　C 上の点 $z=1+\cos t+i\sin t\ (-\pi<t<\pi)$ について，z の絶対値および偏角を t を用いて表せ。また $\dfrac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。

(2)　z が円 C 上の 0 でない点を動くとき，$w=\dfrac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線を描くことを示し，この放物線を図示せよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で，半径 r の 2 つの円 O_1，O_2 の中心をそれぞれ $(r,\ r)$，$(1-r,\ 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし，領域 D の面積を S とする。以下, r は $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

(1) 円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。

(2) 円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P，Q で交わるとする。$\theta=\dfrac{1}{2}\angle \mathrm{PO_1Q}$ とおいて，半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。

(3) 面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。

4　解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\dfrac{1}{e^{-x}+1}-\dfrac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx$ とする。ただし，$a>0$ である。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ を求めよ。

(3)　$h(a)=\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\dfrac{h(a)}{a}$ を求めよ。